問題解答例 自習用 線形代数入門

本資料は,「自習用 線形代数入門」の問と問題の解答例を示したものです．すべての解答例は，岡留が自力で解いたもので，間違っている可能性も十分にあることをお断りしておきます．間違いを見つけた場合は，
tokadome@acm.org
までメールをいただけると助かります.

2020 年 2 月 27 日
岡留　剛

第1章　行列

1.1　行列の意味

問 1.　つぎの行列の型をいえ．

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 4 & 2.7 \\ 3 & 3.6 \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.　2 行 2 列，$2 \times 2$ 型，2 次の正方行列．

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 4 & 2.7 \\ 3 & 3.6 \end{pmatrix}$.　3 行 2 列，$3 \times 2$ 型．

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.　2 行 3 列，$2 \times 3$ 型．

問 2.　つぎのベクトルの次元をいえ．また，それは行ベクトルであるか，列ベクトルであるか．

(1) $\begin{pmatrix} 12 & 22 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 12 & 22 \end{pmatrix}$.　2 次元，行ベクトル

(2) $\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$.　　3 次元，列ベクトル

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.　　4 次元，行ベクトル

問 3.　例 2 の行列（1.2）について，第 1，第 2，第 3 行ベクトルおよび第 1，第 2，第 3 列ベクトルをかけ.

[解答例]

例 2 の行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるので

第 1 行 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

第 2 行 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

第 3 行 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

第 1 列 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

第 2 列 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

第 3 列 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

問 4.　$\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$

のとき，x，y，z，u の値はそれぞれいくらか.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2u, \\ 2y = u, \\ z = 1, \\ -8 = 2x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2u, \\ 2y = u, \\ z = 1, \\ x = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ u = 2, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

1.2　行列の加減と実数倍

行列の加法・減法

問 1.　つぎの行列 A，B の和を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(4) $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix}-7 & 5 & -3 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -8 & 9\end{pmatrix}$.

問 2.　つぎの行列 A，B に対して，$A-B$ を求めよ．また $-A$ を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & -2 & 0\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 4\end{pmatrix}$,　$-A=\begin{pmatrix}-5 & -7\\ -6 & -8\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & -2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ -4 & 0 & -3\end{pmatrix}$,　$-A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

問 3.　$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ のとき，$B+X=A$ が成り立つような行列 X を求めよ．

[解答例]

$$B+X=A \quad \Leftrightarrow \quad X=A-B,$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

問 4.　$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ に対して，$3A$ および $\frac{1}{2}A$ を求めよ．

[解答例]

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

問 5.　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ として，$k(A + B) = kA + kB$ をたしかめよ．

[解答例]

$$k(A + B) = k\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_{11} + b_{11}) & k(a_{12} + b_{12}) \\ k(a_{21} + b_{21}) & k(a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix},$$

$$kA + kB = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} + kb_{11} & ka_{12} + kb_{12} \\ ka_{21} + kb_{21} & ka_{22} + kb_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(a_{11} + b_{11}) & k(a_{12} + b_{12}) \\ k(a_{21} + b_{21}) & k(a_{22} + b_{22}) \end{pmatrix}.$$

問 6.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，つぎの行列を求めよ．

(1)　$3A - B + 2C$.　　(2)　$2(A - B + 2C) + B - 3C$.

[解答例]

(1)　$3A - B + 2C = 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$

(2) $2(A - B + 2C) + B - 3C$

$$= 2\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\right\} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 22 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1.3　行列の乗法

問 1.　つぎの積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\times(-2) + 3\times(-1) = -1.$

(2) $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

問 2.　つぎの行列の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.　　(4) $\begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.7 & -0.8 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.　(6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 4+4 \\ 9+4 & 12+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+0 & 14+15 \\ -4+0 & 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 29 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 0-3 \\ 5-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(4)
$$\begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.7 & -0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.12+0.14 & -0.18+0.16 \\ -0.04-0.35 & 0.06-0.4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.26 & -0.02 \\ -0.39 & -0.34 \end{pmatrix}.$$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-15 \\ -24-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -29 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-5 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$.

1.4　乗法の性質

問 1.　A，B，C を 2×2 型の行列とし，上にならって

$$AB - AC = A(B - C)$$

を証明せよ．

[解答例]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{pmatrix}.$$

$AB-AC$ の (1, 1) 成分は $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}-(a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21})$，これは $a_{11}(b_{11}-c_{11})+a_{12}(b_{21}-c_{21})$ である．これは $A(B-C)$ の (1, 1) 成分．ほかの成分についても同様．

問 2.　A，B，C を 2×2 型の行列とし，$(AB)C = A(BC)$ を証明せよ．

[解答例]

A，B，C を問 1 の行列とする．問 1 の解答から

$$\begin{aligned}(AB)C &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{22}) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

この (1, 1) 成分は $A(BC)$ の (1, 1) 成分に等しい．ほかの成分も同様に等しいことを示せる．

問 3.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，　$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

のとき，つぎの式をなるべく簡単な方法で計算せよ．

(1)　$AC + BC$.　　(2)　$AB - AC$.　　(3)　$ABAB$.

[解答例]

(1) $AC + BC = (A + B)C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(2) $AB - AC = A(B - C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}.$

(3) $ABAB = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$= 5^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 150 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

問 4.　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

については，$AB = BA$ が成り立つことをたしかめよ．

[解答例]

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって $AB = BA$.

問 5.　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として　$AI = IA = A$ をたしかめよ．

[解答例]

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

問 6.　上のことをたしかめよ.（A がどんな 2×2 型の行列であっても

$$AO = OA = O$$

が成り立つ.）

[解答例]

$$AO = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = OA.$$

問 7.

$$A = \begin{pmatrix} a & ak \\ b & bk \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき，あたえられた任意の a，b，k，c，d に対して，

$$AB = O$$

となるように x，y を定めよ．ただし，$ab \neq 0$ とする．

[解答例]

$$AB = \begin{pmatrix} a & ak \\ b & bk \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ack & ay + adk \\ bx + bck & by + bdk \end{pmatrix}.$$

よって
$AB = O$ であるためには
$a(x + ck) = 0, \quad a(y + dk) = 0,$
$b(x + ck) = 0, \quad b(y + dk) = 0.$
$ab \neq 0$ より $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ なので
$x + ck = 0$ かつ $y + dk = 0.$

ゆえに $x = -ck, \quad y = -dk.$

問 8.　“$A \neq O$，$AB = AC$　ならば　$B = C$”
という命題が成り立たないことを，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

としてたしかめよ．

[解答例]

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}.$$

よって $AB = AC$．しかし $B \neq C$．

問題

1.　つぎの行列を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$　　(2) $3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

(2) $3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & -12 \\ -2 & 3+2 \\ 6-6 & -6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ -2 & 5 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$

2.　つぎの等式が成り立つように，a，b，c，d の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2c & 3 \end{pmatrix}.$$

[解答例]

$$a + 2 = -5 \quad \Leftrightarrow \quad a = -7,$$

$$b + 1 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad b = 6,$$

$$1 + \frac{1}{2} = 2c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{4},$$

$$2 + \frac{d-1}{2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + d = 6 \quad \Leftrightarrow \quad d = 3.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
のとき

$$2B - X = X - (A + B)$$

となる行列 X を求めよ.

[解答例]

$X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ とする.

$$2B - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-x & 8-u \\ 6-y & 14-v \end{pmatrix},$$

$$X - (A + B) = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u-10 \\ y & v-12 \end{pmatrix}.$$

よって

$$-2 - x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,$$

$$6 - y = y \quad \Leftrightarrow \quad y = 3,$$

$$8 - u = u - 10 \quad \Leftrightarrow \quad u = 9,$$

$$14 - v = v - 12 \quad \Leftrightarrow \quad v = 13.$$

ゆえに

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

4.　つぎの行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.　　(4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$.　　(6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -6 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5.$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 & 12 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 5 \\ 8 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$

(4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 6 & 15 - 15 \\ -2 + 2 & 6 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

(6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -6 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 & -1 + 1 \\ 24 - 24 & -6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

として，つぎの行列を計算せよ．ただし，A^2 は AA を表わす．

(1) A^2.　(2) $A^2 - B^2$.　(3) $(A+B)(A-B)$.

[解答例]

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

(2) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12 & 6+3 \\ 8+4 & 12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$.

(1) の結果より，$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+8 & 3+2 \\ 6+16 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9 & 4+12 \\ 4+3 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - B^2 - AB + BA = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を計算せよ．

[解答例]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+hy \\ hx+by \end{pmatrix} \\ &= x(ax+hy) + y(hx+by) \\ &= ax^2 + 2hxy + by^2. \end{aligned}$$

第2章　逆行列と連立1次方程式

2.1　逆行列

問 1.　（2.2）が（2.1）を満たすことを，実際に計算してたしかめよ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問 2.　上と同様な方法で，2 次の正方行列 X と A について，$XA = I$ ならば X は A の逆行列であることを証明せよ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} ax+cu=1 & [1] \\ bx+du=0 & [2] \end{cases} \\ \begin{cases} ay+cu=0 & [3] \\ by+dv=1 & [4] \end{cases} \end{array}$$

$[1]\times d-[2]\times c$ より $(ad-bc)x = d$

$[3]\times d-[4]\times c$ より $(ad-bc)y = -c$

$[2]\times a-[1]\times b$ より $(ad-bc)u = -b$

$[4]\times a-[3]\times b$ より $(ad-bc)v = a$

i）$ad - bc \neq 0$ のとき．

$$x = \frac{d}{ad-bc}, \qquad y = \frac{-c}{ad-bc}.$$

$$u = \frac{-b}{ad-bc}, \qquad v = \frac{a}{ad-bc}.$$

ii）$ad - bc = 0$ のとき．

$a = b = c = d = 0$　これは [1] と [4] に矛盾．

ゆえに逆行列は存在しない．

問 3.　つぎの行列に逆行列があれば，それを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A^{-1} = \dfrac{1}{2+3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$.　よって逆行列は存在しない．

2.2　連立方程式

問.　つぎの連立1次方程式を，上の例題の解法にならってとけ．

(1) $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 5x - 3y = 17. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x - 2y = -10, \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x - 3y = 23. \end{cases}$

[解答例]

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6+5}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 17 \\ 30 - 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4+6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(3) $$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 1 \\ -1 + \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(4) $$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-15-14} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 12 + 46 \\ 28 - 115 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 58 \\ -87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.3　ガウスの消去法（掃き出し法）

問 1.　つぎの連立方程式をガウスの消去法によってとけ.

(1) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x - y = 4. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 7x - 3y = 23, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x + 3y = 50, \\ 9x - 2y = 16. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x - 2y = 10, \\ y + 3z = -18, \\ z - 4x = -21. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 2, \\ 4x + 5y - 2z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$

[解答例]

(1)

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & -2 & 5 & [1] \\
1 & -1 & 4 & [2] \\
\hline
1 & -2 & 5 & [3] = [1] \\
0 & 1 & -1 & [4] = [2] + [1] \times (-1) \\
\hline
1 & 0 & 3 & [5] = [3] + [4] \times 2 \\
0 & 1 & -1 & [6] = [4]
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}
$$

(2)

$$
\begin{array}{rrrl}
7 & -3 & 23 & [1] \\
5 & 2 & 4 & [2] \\
\hline
1 & -\frac{3}{7} & \frac{23}{7} & [3] = [1] \times \frac{1}{7} \\
5 & 2 & 4 & [4] = [2] \\
\hline
1 & -\frac{3}{7} & \frac{23}{7} & [5] = [3] \\
1 & \frac{29}{7} & -\frac{87}{7} & [6] = [4] + (-5) \times [3] \\
\hline
1 & 0 & \frac{32}{7} & [7] = [5] + [6] \times \frac{3}{29} \\
0 & 1 & -3 & [8] = [6] \times \frac{7}{29}
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} x = \dfrac{32}{7}, \\ y = 3. \end{cases}
$$

(3)

$$
\begin{array}{ccc|l}
5 & 3 & 50 & [1] \\
9 & -2 & 16 & [2] \\
\hdashline
1 & \dfrac{3}{5} & 10 & [3] = [1] \times \dfrac{1}{5} \\
9 & -2 & 16 & [4] = [2] \\
\hdashline
1 & \dfrac{3}{5} & 10 & [5] = [3] \\
0 & -\dfrac{37}{5} & -74 & [6] = [4] + [3] \times (-9) \\
\hdashline
1 & 0 & 4 & [7] = [5] + [6] \times \dfrac{3}{37} \\
0 & 1 & 10 & [8] = [6] \times \left(-\dfrac{5}{37}\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} x = 4, \\ y = 10. \end{cases}
$$

(4)

1	-2	0	10	[1]
0	1	3	-18	[2]
-4	0	1	-21	[3]
1	-2	0	10	[4] = [1]
0	1	3	-18	[5] = [2]
0	-8	1	19	[6] = [3] + [1] × 4
1	0	6	-26	[7] = [4] + [5] × 2
0	1	3	-18	[8] = [5]
0	0	25	-125	[9] = [6] + [5] × 8
1	0	6	-26	[10] = [7]
0	1	3	-18	[11] = [8]
0	0	1	-5	[12] = [9] × $\frac{1}{25}$
1	0	6	-26	[13] = [10]
0	1	0	-3	[14] = [11] + [12] × (−3)
0	0	1	-5	[15]
1	0	0	4	[16] = [13] + [15] × (−6)
0	1	0	-3	[17] = [14]
0	0	1	-5	[18] = [15]

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = -3, \\ z = -5. \end{cases}$$

(5)

1	− 4	3	2	[1]
4	5	− 2	1	[2]
1	1	− 1	1	[3]
1	− 4	3	2	[4] = [1]
0	21	− 14	− 7	[5] = [2] + [1] × (−4)
0	5	− 4	− 1	[6] = [3] + [1] × (−1)
1	− 4	3	2	[7]
0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	[8] = [5] × $\left(\frac{1}{21}\right)$
0	5	− 4	− 1	[9] = [6]
1	− 4	3	2	[10] = [7]
0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	[11] = [8]
0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	[12] = [9] + [8] × (−5)
1	− 4	3	2	[13] = [10]
0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	[14] = [11]
0	0	1	− 1	[15] = [12] × $\left(-\frac{3}{2}\right)$
1	− 4	3	2	[16] = [13]
0	1	0	− 1	[17] = [14] + [15] × $\left(\frac{2}{3}\right)$
0	0	1	− 1	[18] = [15]
1	0	3	− 2	[19] = [16] + [17] × 4
0	1	0	− 1	[20] = [17]
0	0	1	− 1	[21] = [18]
1	0	0	1	[22] = [19] + [21] × (−3)
0	1	0	− 1	[23] = [20]
0	0	1	− 1	[24] = [21]

よって　$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = -1. \end{cases}$

問 2.　ガウスの消去法によりつぎの行列の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1)
$$
\begin{array}{cccc}
2 & -1 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
3 & 1 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\
\hdashline
1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5}
\end{array}
$$

よって

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{array}{cccc}
0 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0
\end{array}$$

行のとりかえ

よって

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 6 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 1
\end{array}$$

行き止まり．よって逆行列は存在しない．

問題

1.　つぎの各行列に逆行列があれば，それを求めよ．

(1)　$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.　　　(2)　$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(3)　$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$.　　　(4)　$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

[解答例]

4 章で導入するが $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $ad-bc$ を A の行列式という.

1.　A の行列式を $|A|$ と書く.

(1)　$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,　　$|A| = 6-5 = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2)　$A=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,　　$|A| = -8+8 = 0$.

逆行列は存在しない.

(3)　$A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$,　　$|A| = 0.15-0.06 = 0.09$.

$$A^{-1} = \frac{1}{0.09}\begin{pmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.6 & 0.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 30 & -10 \\ -60 & 50 \end{pmatrix}.$$

(4)　$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,　　$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2.　つぎの連立 1 次方程式を逆行列を計算する方法によってとけ.

(1) $\begin{cases} 5x+10y=14, \\ 2x-7y=-1. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 9x-2y=16, \\ 5x+3y=50. \end{cases}$

[解答例]

(1)　$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-35-20}\begin{pmatrix} -7 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 98-10 \\ 28+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 88 \\ 33 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 50 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{27+10}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 48+100 \\ -80+450 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 148 \\ 370 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，つぎの行列 X を求めよ．

(1) $AX = B.$　　　(2) $XA = B.$

[解答例]

$X = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y & 2u+4v \\ 3x+7y & 3u+7v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} 2x+4y=4, \\ 3x+7y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} 2u+4v=10, \\ 3u+7v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=29, \\ v=-12. \end{cases}$$

(2)　$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3u & 4x+7u \\ 2y+3v & 4y+7v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} 2x+3u=4, \\ 4x+7u=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ u=2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2y+3v=5, \\ 4y+7v=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=13, \\ v=-7. \end{cases}$$

4.　(1)　行列 $\begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 5 & 3-x \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように x を定めよ．

(2)　行列 $\begin{pmatrix} x+1 & 5 \\ -7 & y-2 \end{pmatrix}$ の逆行列がそれ自身となるように x, y を定めよ．

[解答例]

(1)　$(2-x)(3-x)-20=0 \Leftrightarrow x^2-5x-14=0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=7$ or $x=-2.$

(2)　$\begin{pmatrix} x+1 & 5 \\ -7 & y-2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{(x+1)(y-2)+35}\begin{pmatrix} y-2 & -5 \\ 7 & x+1 \end{pmatrix}.$

$$\frac{-5}{(x+1)(y-2)+35} = 5 \Leftrightarrow xy-2x+y+33=-1 \text{ — [1]}.$$

$$\frac{y-2}{(x+1)(y-2)+35} = x+1 \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = x+1 \Leftrightarrow y-2=-x-1.$$

これから

$y=-x+1.$　これを [1] に代入して

$x(-x+1)-2x-x+1+33=-1 \Leftrightarrow -x^2-2x+35=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-35=0 \Leftrightarrow (x+7)(x-5)=0 \Leftrightarrow x=-7$ or $x=5.$

$y=8$ or $y=-4.$　よって $\begin{cases} x=-7, \\ y=8, \end{cases}$ or $\begin{cases} x=5, \\ y=-4. \end{cases}$

5.　2 次の正方行列 A，B がどちらも逆行列をもつとき，行列 $B^{-1}A^{-1}$ が行列 AB の逆行列であること，すなわち

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

を証明せよ．また，$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ が，一般には成り立たないことを示せ．

[解答例]

$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$

同様に

$(AB)B^{-1}A^{-1} = I.$　ただし I は単位行列．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

一方

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

よって $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

第3章　線形変換

3.1　線形変換とその意味

問 1.　つぎの各対称移動による点 $(x,\ y)$ の像を点 $(x',\ y')$ とするとき，x，y と x'，y' の間の関係を，上の例 1，2 にならって表わせ.

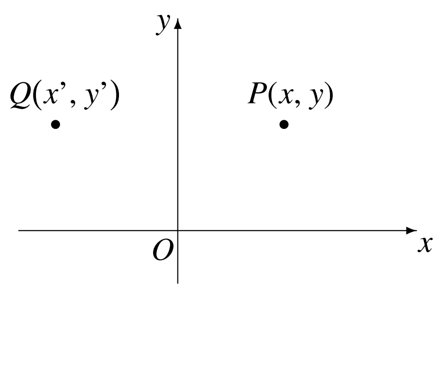
(1)　y 軸に関する対称移動.　(2)　原点に関する対称移動.

(3)　直線 $y = x$ に関する対称移動.

[解答例]

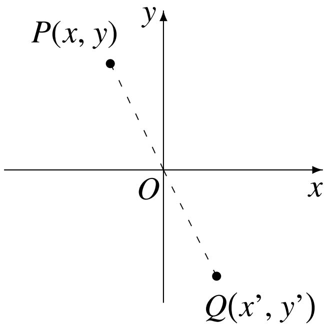
(1)　$x' = -x$，$y = y'$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



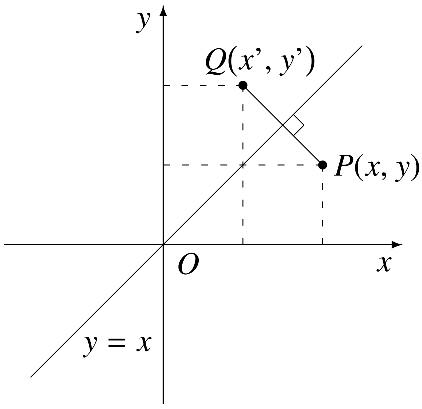
(2)　$x' = -x$，$y = -y'$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



(3)　　$x' = y$，$y' = x$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



問 2.　原点のまわりの 60° の回転による点 (x, y) の像を点 (x', y') とするとき，x，y，x'，y' の関係を上の例によって行列で表わせ.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

問 3.　線形変換の行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，この線形変換によるつぎの各点の像を求めよ．

$$(0, 0),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (5, -6).$$

[解答例]
(0, 0) の場合

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1, 0) の場合

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(0, 1) の場合

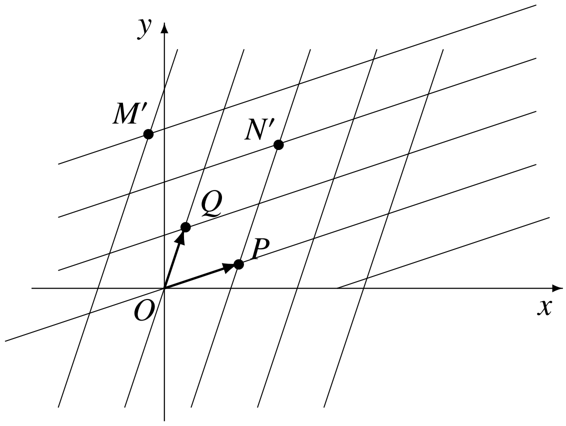
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(5, −6) の場合

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 6 \\ 15 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

問 4.　図 3.5 の点 M，N は f によってそれぞれ図 3.6 のどの点にうつされるか．

[解答例]



$\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}_2}$ を2辺とする正方形はOPとOQを辺とする平行四辺形にうつされる．

問5.　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によって，つぎの各直線はそれぞれどのような直線にうつされるか．

(1) x 軸.　(2) y 軸.　(3) $2x + y + 1 = 0$.

[解答例]

(1) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}.$$

よって $x' = x$，$y' = 3x$，ゆえに $y' = 3x'$．すなわち $y = 3x$ にうつされる．

(2) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 4y \end{pmatrix}.$$

よって $x' = 2y$，$y' = 4y$，ゆえに $y' = 2x'$．すなわち $y = 2x$ にうつされる．

(3) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

$$x = -\frac{1}{2}(4x' - 2y'),\quad y = -\frac{1}{2}(-3x' + y').$$

$$\begin{aligned} 2x + y + 1 = 0 &\iff -(4x' - 2y') - \frac{1}{2}(-3x' + y') + 1 = 0 \\ &\iff -\frac{5}{2}x' + \frac{3}{2}y' + 1 = 0. \end{aligned}$$

よって $-5x + 3y + 2 = 0$ にうつされる．

問6.　行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によって，直線 $x+2y+7 = 0$ にうつされる図形を求めよ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 3y \end{pmatrix}.$$

$$x' + 2y' + 7 = 0 \iff (2x + y) + 2(-x + 3y) + 7 = 0$$
$$\iff 7y + 7 = 0 \iff y = -1.$$

3.2　線形変換の線形性

問 1.　線形変換 f の行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像はそれぞれ $\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であることを示せ.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

問 2.　線形変換 f のもとでの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の像がそれぞれ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき，f の行列を求めよ.

[解答例]

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より } a = 2,\ c = 1.$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{より } b = -1,\ d = 3.$$

問 3.　線形変換 f と定数 k, l に対し，以下の等式が成り立つことを示せ.

$$f(k\boldsymbol{p}_1 + l\boldsymbol{p}_2) = kf(\boldsymbol{p}_1) + lf(\boldsymbol{p}_2).$$

[解答例]

線形変換の線形性（I）より

$$f(k\boldsymbol{p}_1 + l\boldsymbol{p}_2) = f(k\boldsymbol{p}_1) + f(l\boldsymbol{p}_2).$$

さらに（II）より

$$f(k\boldsymbol{p}_1) = kf(\boldsymbol{p}_1), \quad f(l\boldsymbol{p}_2) = lf(\boldsymbol{p}_2).$$

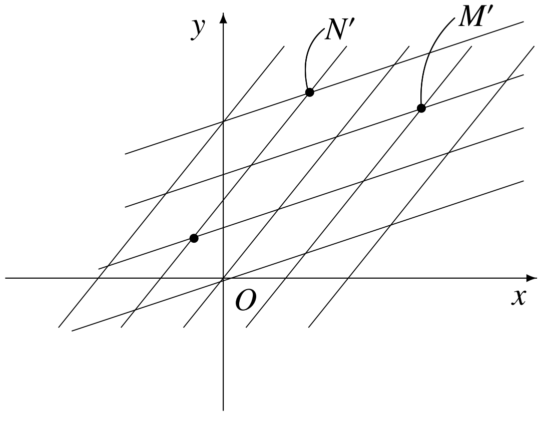
よって

$$f(k\boldsymbol{p}_1 + l\boldsymbol{p}_2) = kf(\boldsymbol{p}_1) + lf(\boldsymbol{p}_2).$$

問 4.　図 3.7 の左の図の 2 つの点 M と N は，それぞれ右の図のどの点にこの線形変換のもとでうつされるか.

[解答例]

M がうつる点を M'，N がうつる点を N' とすると下図.



問 5.　上の例題と同じ仮定のもとで，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P としたとき，P の像 P' は線分 $A'B'$ を $m:n$ に内分することを示せ.

[解答例]

点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ とすると，点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ は,

$$\boldsymbol{p} = \frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{m+n}.$$

よって

$$f(\boldsymbol{p}) = f\left(\frac{n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}}{m+n}\right) = \frac{n}{m+n}f(\boldsymbol{a}) + \frac{m}{m+n}f(\boldsymbol{b}) = \frac{nf(\boldsymbol{a}) + mf(\boldsymbol{b})}{m+n}.$$

$f(\boldsymbol{a})$ は A' の，$f(\boldsymbol{b})$ は B' の位置ベクトルだから $f(\boldsymbol{p})$ は線分 $A'B'$ を $m:n$ に内分する点である.

3.3　線形変換による図形の移動

問 1.　線形変換の行列が $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ である線形変換のもとで点 $(7,5)$ へうつされる点をみつけよ.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9, \\ y = 8. \end{cases}$$

よって求める点は $(-9,\ 8)$.

問 2.　上の例の線形変換のもとでうつされる像が，直線 $y = 2x$ 上の点 $(1,2)$ となる点のあつまりは，直線 $2x + y = 1$ 上の点全体の集合であることを示せ.

[解答例]

点 (1, 2) にうつされる点を (x, y) とすると，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y = 1.$$

すなわち，(x, y) は直線 $2x + y = 1$ 上にある．逆に $2x + y = 1$ 上の任意の点を (x', y') とする．点 (x', y') は f のもとで

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + y' \\ 4x' + 2y' \end{pmatrix}$$

にうつされる．点 (x', y') は直線 $2x + y = 1$ 上の点なので $2x' + y' = 1$ を満たす．よって $\begin{pmatrix} 2x' + y' \\ 4x' + 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

問 3.　線形変換 f のもとで 2 つのことなる点 A と B がそれぞれことなる点 A' と B' にうつされるならば，線分 AB はどんな図形にうつされるか．

[解答例]

点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ とする．線分 AB 上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

である．

f の線形性より

$$f(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{a}) + t\big(f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})\big), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$f(\boldsymbol{a})$，$f(\boldsymbol{b})$ はそれぞれ A'，B' の位置ベクトルなので $f(\boldsymbol{p})$ は線分 $A'B'$ 上の点となる．

問 4.　上の主張を証明せよ．

[解答例]

問 3 の結果を利用する．点 A と B が両方とも A' にうつされるのだから，$f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$．よって線分 AB 上の任意の点 P は，$f(\boldsymbol{p}) = f(\boldsymbol{a}) + t(f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})) = f(\boldsymbol{a})$ なので A' にうつされる．

問 5.　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，次の直線はどのような図形にうつされるか．

(1) $y = 2x + 1$.　(2) $2x + y + 1 = 0$.　(3) x 軸.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x' + y', \\ y = \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' \end{cases}.$$

(1) $y = 2x - 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' = -4x' + 2y' + 1 \Leftrightarrow \dfrac{11}{2}x' - \dfrac{5}{2}y' - 1 = 0.$

$\therefore\ 11x - 5y - 2 = 0.$

(2) $2x+y+1 = 0 \Leftrightarrow -4x' + 2y' + \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' + 1 = 0 \Leftrightarrow -5x'+3y'+2 = 0.$

$\therefore\ -5x + 3y + 2 = 0.$

(3) x 軸は $y = 0$.

$y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{1}{2}y' = 0.$

よって $y = 3x$.

問 6.　行列 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，つぎの直線はどのような図形にうつされるか．

(1) $y = 3x + 2$.　(2) y 軸.　(3) $2x - y + 1 = 0$.

[解答例]

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない．

(1)　$y = 3x - 2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ -6x + 3y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y = 2(2x - y) = 2(2x - 3x + 2) = 2(-x + 2), \\ y' = -6x + 3y = -3(2x - y) = -3(2x - 3x + 2) = -3(-x + 2). \end{cases}$$

よって $-3x' = 2y'$ で x は任意の実数をとるとき，x' もまた任意の実数をとる．よって直線 $y = -\dfrac{3}{2}x$.

(2)　y 軸は $x = 0$.

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y = -2y, \\ y' = -6x + 3y = 3y. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3}{2}x'.$$

y は任意の実数をとるので y' もまたしかり．ゆえに直線 $y = -\dfrac{3}{2}x$.

(3)　$2x - y + 1 = 0$.

$$\begin{cases} x' = 2(2x - y) = -2, \\ y' = -3(2x - y) = 3. \end{cases}$$

よって点 $(-2,\ 3)$.

問 7.　例題 2 の線形変換 f のもとで，直線 $x = c$, ただし c は定数，はどのような直線にうつされるか．

[解答例]

直線 $x = c$ 上の 2 点，たとえば $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ を考えると，それらは f でそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 2c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c - 5 \\ 2c - 4 \end{pmatrix}$$

にうつる．よって $x = c$ がうつる直線は

$$y-2c=\frac{2c-(2c-4)}{3c-(3c-5)}(x-2c)=\frac{4}{5}(x-2c).$$

すなわち

$$4x-5y+2c=0.$$

問 8.　以下で表現される線形変換のもとで，不動（動かない）である点を示せ．また，自分自身を自分自身にうつす直線はあるか．ある場合はそれらを示せ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.\qquad (2)\ \begin{pmatrix}5 & -6\\ 3 & -4\end{pmatrix}.\qquad (3)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

[解答例]

(1)　不動点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\ 2x+3y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+y\\ 2x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\ y=-x.$$

自分自身にうつる直線を $y=mx+n$ とする．

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\ 2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+m)x+n\\ (2+3m)x+3n\end{pmatrix}.$$

この点が同直線上にあるのだから

$$(2+3m)x+3n=m((2+m)x+n)+n\ \Leftrightarrow\ (m^2-m-2)x+mn-2n=0.$$

これが任意の x で成立するためには

$$\begin{aligned}&m^2-m-2=0\ \text{かつ}\ \ mn-2n=0\\ &\Leftrightarrow\ (m-2)(m+1)=0\ \ \text{かつ}\ \ n(m-2)=0\\ &\Leftrightarrow\ m=2\ \text{または}\begin{cases}m=-1,\\ n=0.\end{cases}\end{aligned}$$

よって求める直線は

$$y=2x+n\ (n\text{ は任意の実数}),$$

または

$$y=-x.$$

(2)　不動点を $(x,\ y)$ とする．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y \\ 3x-4y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4x-6y \\ 3x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 3y, \\ 3x = 5y. \end{cases}.$$

これを満たす $(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ だけ．よって $(0,\ 0)$.

自身にうつす直線を $y = mx + n$ とする．

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y \\ 3x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6(mx+n) \\ 3x-4(mx+n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (5-6m)x-6n \\ (3-4m)x-4n \end{pmatrix}.$$

これが同直線上にあるという条件から

$$(3-4m)x - 4n = m((5-6m)x-6n) + n$$
$$\iff (6m^2 - 9m + 3)x + 6mn - 5n = 0.$$

これが任意の x で成立するためには

$$2m^2 - 3m + 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad 6mn - 5n = 0$$
$$\iff (2m-1)(m-1) = 0 \quad \text{かつ} \quad n(6m-5) = 0$$
$$\iff \begin{cases} m = \dfrac{1}{2}, \\ n = 0, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} m = 1, \\ n = 0. \end{cases}$$

よって

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{または} \quad y = x.$$

(3)　不動点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0,\ \ y = 0.$$

自身にうつす直線を $y = mx + n$ とする．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (mx + n) \\ 2x + 3(mx + n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - m)x - n \\ (2 + 3m)x + 3n \end{pmatrix}.$$

この点がやはり同直線上にあるためには

$$\begin{aligned} & (2 + 3m)x + 3n = m((1 - m)x - n) + n \\ \Leftrightarrow\ & (m^2 + 2m + 2)x + mn + 2n = 0. \end{aligned}$$

これがすべての x で成立するためには

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \quad \text{かつ} \quad mn + 2n = 0.$$

ところが

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \ \text{の判別式} = 4 - 8 = -4 < 0$$

であるから実数の解はない．

よって自分自身にうつす直線は存在しない．

3.4　線形変換の合成と逆変換

線形変換の合成

問 1.　線形変換 f，g の行列が，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるとき，合成変換 $g \circ f$ および $f \circ g$ の行列を求めよ．

[解答例]

$g \circ f$：

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 0 & 6 + 0 \\ 1 + 0 & 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$f\circ g$：

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2 & 0-2\\ 0-1 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

問 2.　$\begin{cases}x'=x-2y,\\ y'=3x+4y,\end{cases}$　　$\begin{cases}x''=3x'+y',\\ y''=4x'-y'\end{cases}$

であるとき，x''，y'' を x，y によって表わせ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+3 & -6+4\\ 4-3 & -8-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

ゆえに $\begin{cases}x''=6x-2y,\\ y''=x-12y.\end{cases}$

問 3.　つぎの式を表わす線形変換について，逆変換の式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　より　$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{6-9}\begin{pmatrix}2 & -9\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

よって $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.

問 4.

(1) 原点を中心とする相似比 k の相似変換の行列を求めよ．

(2) (1) の行列の逆行列を求めよ．

(3) (1) の線形変換の逆変換はどのような相似変換を表わすか．

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (k-a)x-by \\ cx+(k-c)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
これが任意の $(x\ y)^{\mathrm{T}}$ について成り立つためには $a=d=k$，$b=c=0$．
よって求める行列は $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k} \end{pmatrix}\ (k \neq 0).$

(3) 原点を中心とする相似比 $\dfrac{1}{k}$ の相似変換．

問 5.　原点を中心とする角 θ の回転と角 $-\theta$ の回転の行列をそれぞれ求め，その一方が他方の逆行列となっていることをたしかめよ．

[解答例]

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} R(\theta)\cdot R(-\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題

1.　点 $(x,\ y)$ をつぎの各点にうつす写像は線形変換か．また，線形変換であればその行列を求めよ．

(1) $(0,\ x)$.　(2) $(x,\ -1)$.　(3) $(y,\ -2x)$.

(4) $(x-y,\ x+2y)$.　(5) $\left(\dfrac{x+3}{2},\ \dfrac{y-2}{2}\right)$.　(6) $(x,\ 2-y)$.

[解答例]

(1)　対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ は $\begin{cases} 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y, \\ x = 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{cases}$ と x，y の 1 次式で書けるので線形変換である．その行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)　対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$.

これが線形変換であるためには，任意の $(x\ \ y)^{\mathrm{T}}$ に対して，$-1 = ax+by$ となる定数 a，b が存在しなければならない．しかしそのような a，b は存在しないので線形変換ではない．

(3)　対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -2x \end{pmatrix}$ は $\begin{cases} y = 0 \cdot x + 1 \cdot y, \\ -2x = (-2)x + 0 \cdot y \end{cases}$ と書ける．

よって線形変換である．行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4)　対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y \end{pmatrix}$ は $\begin{cases} x-y = 1 \cdot x + (-1) \cdot y, \\ x+2y = 1 \cdot x + 2 \cdot y \end{cases}$ と書ける．よっ

て線形変換．行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5) 対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x+3}{2} \\ \dfrac{y-2}{2} \end{pmatrix}$ が線形変換であるためには任意の $(x \ \ y)^{\mathrm{T}}$ に対して $\dfrac{x+3}{2} = ax + by$ となる定数 a，b が存在しなければならない．このような a，b は存在しないので線形変換ではない．

(6) 対応 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2-y \end{pmatrix}$ が線形変換であるためには任意の $(x \ \ y)^{\mathrm{T}}$ に対して，$2 - y = ax + by$ となる定数 a，b が存在する必要がある．しかしそのような a，b は存在しないので線形変換ではない．

2. つぎの線形変換の行列は，どのような図形的操作に対応するかをいえ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$． (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$． (3) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$．

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}$ だから，x 軸方向にだけ図形を 2 倍にする操作．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ だから直線 $y = x$ に関して，図形を対称にうつす操作．

(3) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$. よって $\dfrac{\pi}{4}$ の回転．

3.　つぎの行列の表わす線形変換によって，4 点

$$(0,\ 0),\ \ (1,\ 0),\ \ (1,\ 1),\ \ (0,\ 1)$$

を頂点とする正方形の周および内部の点は，どのような図形にうつされるか．

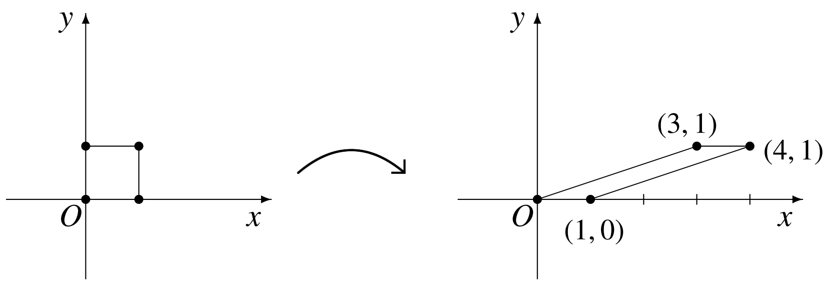
(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) 原点は不動：$(0,\ 0) \mapsto (0,\ 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

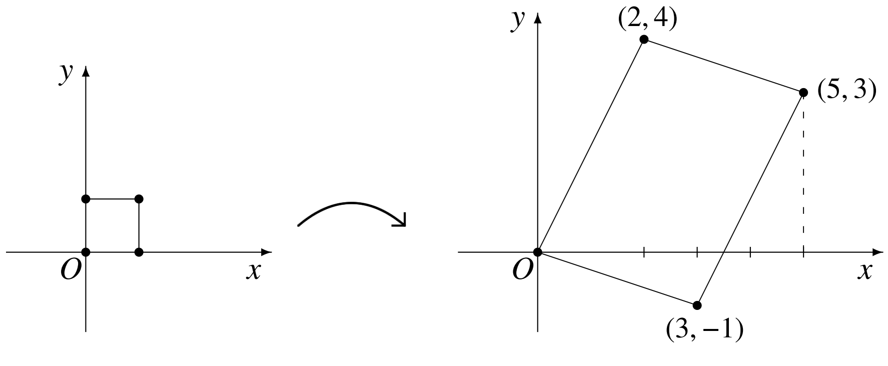
よって $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (4,\ 1),\ (3,\ 1)$ を頂点とする平行四辺形．



(2)　原点は不動：$(0,\ 0) \mapsto (0,\ 0)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

以上を頂点とする平行四辺形．



4.　平面上の点 P をつぎのような点 P' にうつす線形変換の行列を求めよ.

(1)　点 P' は，点 P の x 軸上への正射影.

(2)　点 P' は，点 P をとおる傾き 2 の直線と直線 $y = x$ との交点.

[解答例]

(1) $(x,\ y) \mapsto (x,\ 0)$ だから $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $P'(x',\ y')$ とすると

$$\begin{cases} y' = x', \\ y' - y = 2(x' - x). \end{cases} \quad \text{よって} \begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases} \quad \text{ゆえに} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

5.　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき，つぎの値を求めよ.

(1)　$\sin(\alpha + \beta)$.　　(2)　$\cos(\alpha - \beta)$.

[解答例]　$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より $\sin\beta > 0$ などに注意して

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{8}{17}\right) - \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \cdot \sqrt{1 - \frac{64}{17^2}} = \frac{13}{85}.$$

(2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{64}{17^2}} = \frac{36}{85}.$$

6.　(1)　原点のまわりの 30° の回転を表わす行列を求めよ.

(2)　直線 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ を，原点のまわりに 30° だけ回転して得られる直線の方程式を求めよ.

[解答例]

(1) $R(30°) = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

(2) $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R(30°)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(-30°)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

よって $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}X + \dfrac{1}{2}Y, \\ y = -\dfrac{1}{2}X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}Y. \end{cases}$

これを $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ に代入して

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}X + Y\right) - \frac{1}{2}\left(-X + \sqrt{3}Y\right) - 1 = 0 \iff 4X - 2 = 0 \iff X = \frac{1}{2}.$$

第4章　行列式

問 1.　以下の行列の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 9.$

問 2.　回転行列 $R(\theta)$ の行列式は 1 であることを示せ．

[解答例]

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin\theta)\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

4.1　行列式の意味

問 1.　以下の行列で表現される線形変換によって単位正方形がうつされる平行四辺形の面積を求めよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[解答例]　定理 1 により，求める面積は行列式の絶対値だから

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$　ゆえに 2.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$　ゆえに 0.

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5.$　ゆえに 5.

問 2.　回転の行列 $R(\theta)$ で表現される線形変換により単位正方形がうつされる図形の面積を求めよ.

[解答例]

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

問 3.　以下の行列で表現される線形変換で平面が裏返るか.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

[解答例]

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1 > 0.$　裏返らない.

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 < 0.$　裏返る.

問 4.　回転の行列 $R(\theta)$ で表現される線形変換で平面は裏返らない．これを示せ.

[解答例]

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

4.2　行列式の性質

問 1.　A，B を 2 次正方行列とする．乗法性 $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$ を示せ．

[解答例] $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とする．

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \left|AB\right| &= (a_1b_1 + a_2b_3)(a_3b_2 + a_4b_4) - (a_1b_2 + a_2b_4)(a_3b_1 + a_4b_3) \\ &= a_1a_4b_1b_4 + a_2a_3b_2b_3 - a_1a_4b_2b_3 - a_2a_3b_1b_4 \\ &= (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) = \left|A\right| \cdot \left|B\right|. \end{aligned}$$

問 2.　以下の行列について $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$ が成り立つことを行列式を計算することにより示せ．

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$，　$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 6 = 18.$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$，　$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$，　$6 \times 3 = 18.$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+10 & 8+4 \\ 3+10 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 16 \times 8 - 12 \times 13 = -28.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14, \quad 2 \times (-14) = -28.$$

問 3.　以下の行列について，$\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$ が成り立つことを逆行列と行列式を計算することにより示せ．

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

[解答例]

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right| = 1 \times 2 - (-1)(-1) = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1. \quad \text{よって} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

$$(2)\quad \left|\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\right| = \left|\frac{1}{6-2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4. \quad \text{よって} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}.$$

4.3　行列式が 0 のとき

問 1.　2 次行列 A についてつぎの同値を示せ．
$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A$ 倍写像 $(f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})$ が単射 $\Longleftrightarrow A$ 倍写像が全射．

[解答例]

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．　$|A| \neq 0 \iff ad - bc \neq 0.$

単射：$|A| \neq 0$ とする．

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}' \iff A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$．　これは f が単射であることを示す．

逆に，f が単射でなければ $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ なる $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ が存在する．

よって $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}$．定理 2 より $|A| = 0$ がわかる．

全射：$|A| \neq 0$ とする．

任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ をとると，$|A| \neq 0$ より A^{-1} が存在するので $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ なる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在し，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる．これは f が全射であることを示す．

逆に，f が全射でなければ，$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ が存在しない $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ がある．$|A| \neq 0$ なら A^{-1} が存在し，先のように $\boldsymbol{y}$ に対し，$A^{-1}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^2$ となり $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ とおけば $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y}$ となる．よって $|A| = 0$.

問題

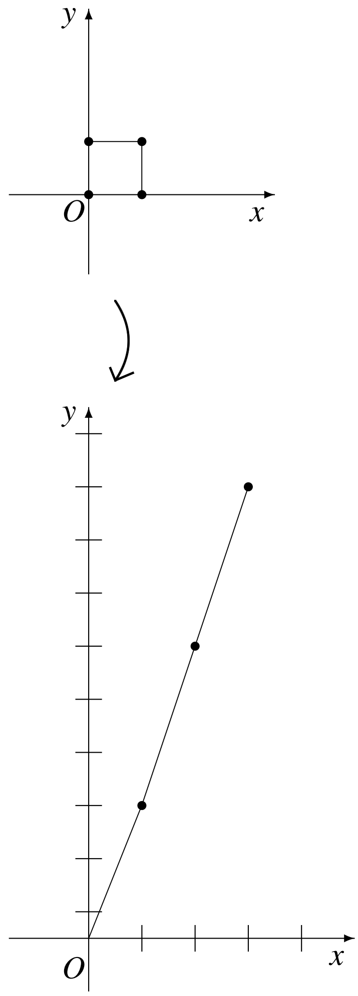
1.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ とする．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を 2 辺とする単位正方形を U とする．A による U の像 $A(U) := \{A\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$ をそれぞれ図示し，その面積を求めよ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$　面積は 0.



2. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix}$ について 1 とおなじことをせよ.

[解答例]

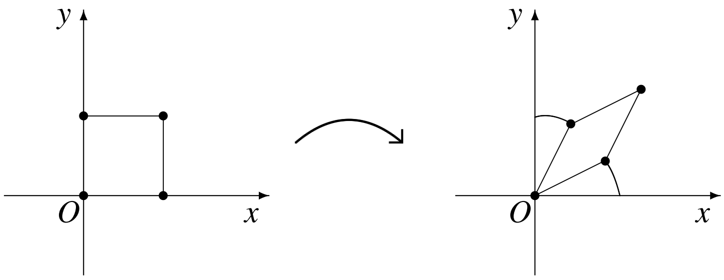
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \sin\beta \\ \sin\alpha + \sin\beta \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 60^\circ$，$\beta = 30^\circ$ のとき.

$$\left| A \right| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta).$$

よって面積は $\left|\sin(\alpha-\beta)\right|$.



3. (1) 2 次行列 $A = (\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w})$ の行列式を $|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}|$ とかくとき，つぎを示せ．

$$|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}| = -|\boldsymbol{w}\ \ \boldsymbol{v}|, \qquad \left|k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}'\ \ \boldsymbol{w}\right| = k|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}| + k'|\boldsymbol{v}'\ \ \boldsymbol{w}|.$$

(2) 成分がすべて実数のとき，上の 2 つの式の図形的意味を考えよ．

[解答例]

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$ とする．

$$\left|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}\right| = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1w_2 - v_2w_1.$$

$$\left|\boldsymbol{w}\ \ \boldsymbol{v}\right| = \begin{vmatrix} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{vmatrix} = v_2w_1 - v_1w_2.$$

よって $\left|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}\right| = -\left|\boldsymbol{w}\ \ \boldsymbol{v}\right|$.

$$\begin{aligned}\left|k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}'\ \ \boldsymbol{w}\right| &= \begin{vmatrix} kv_1+k'v_1 & w_1 \\ kv_2+k'v_2' & w_2 \end{vmatrix} = (kv_1+k'v_1')w_2 - w_1(kv_2+k'v_2') \\ &= k(v_1w_2 - w_1v_2) + k'(v_1'w_2 - w_1v_2') \\ &= k\left|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}\right| + k'\left|\boldsymbol{v}'\ \ \boldsymbol{w}\right|.\end{aligned}$$

(2) 前者は，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ がなす平行四辺形の辺を入れかえると裏返すことに相当することを意味する．

後者は，2つの合成してできたベクトルと他ベクトルの面積は合成前の2つのベクトルと他ベクトルのそれぞれの面積の和であることを意味している．

4. （1）　つぎのような行列 A を求めよ．

（i）　A は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ にうつす．

（ii）　A は $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ にうつす．

（2）　（1）のそれぞれの A について，単位正方形の像の面積と行列式とを求めよ．

[解答例]

（1）　i）　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする．$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.　よって $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

ii）　$A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ となるということなので

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}R(\theta)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\sin\theta&\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{pmatrix}.$$

（2）　i）　$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

像は平行四辺形 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1=3$．面積も 3.

ⅱ）$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta+\cos\theta \\ \cos\theta+\sin\theta \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

像は以上を頂点とする平行四辺形.

$\begin{vmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1$．面積は 1.

5.　つぎのような線形変換を表わす行列 A を（あればすべて）求めよ.

(1)　A は $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を，それぞれ $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ にうつす.

(2)　実数 k を固定する．A は $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} k \\ 2-k \end{pmatrix}$ をそれぞれ基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ にうつす.

(3)　A による線形写像で，直線 $l : y = 2x+1$ が l 自身にうつる.

[解答例]

(1)　$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.　$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6+1=7 \neq 0$ より

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ は逆行列をもつ.

よって $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{vmatrix} = 2-k-k = 2-2k$.

i) $k \neq 1$ のとき

$\begin{pmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{pmatrix}$は逆行列をもつ. $\begin{pmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2(1-k)}\begin{pmatrix}2-k & -k\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

よって $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2(1-k)}\begin{pmatrix}2-k & -k\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

ii) $k = 1$ のとき

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ とすると

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix}$.　ありえない $\rightarrow$ A はない.

(3) $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a+2b)x+b\\(c+2d)x+d\end{pmatrix}$.

$y' = 2x' + 1$ より

$(c+2d)x+d = 2(a+2b)x+2b+1 \Leftrightarrow (c+2d-2a-4b)x+d-2b-1 = 0$.

これが任意の x で成立するためには $c+2d-2a-4b = 0$，$d-2b = 1$.

よって $d = 2b+1$，$c = 2a-2$.

ゆえに $A = \begin{pmatrix}a & b\\2a-2 & 2b+1\end{pmatrix}$，$a$，$b$ は任意の実数.

第5章　固有値と固有ベクトル

5.1　座標変換

問 1.　つぎのベクトルの組は $\boldsymbol{R}^2$ の基底か.

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$.

[解答例]

(1)　$2\times\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.　よって基底でない.

あるいは $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 4-4=0$.

(2)　$\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix} = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1 \neq 0$.　　よって基底である.

問 2.　基底 $\boldsymbol{f}_1^{(\frac{\pi}{3})}$, $\boldsymbol{f}_2^{(\frac{\pi}{3})}$ に関するつぎの点の座標を求めよ.

(1) $P(1,\ 0)$.　　(2) $Q(-1,\ 1)$.

[解答例]

(1)　$$\begin{pmatrix}x^{(\frac{\pi}{3})}\\ y^{(\frac{\pi}{3})}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

(2)　$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{pmatrix}.$$

5.2　直線に関する折り返し

問 1.　A を直線 $y = x\tan\theta$ に関する折り返し，B を x 軸に関する折り返しを表わす行列とする．AB と BA はそれぞれどんな変換を表わすか．

[解答例]

直線 $l : y = x\tan\theta$ に関する折り返しの行列 A は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

B は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ だから

$$AB = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = R(2\theta),$$

すなわち AB は原点まわりの 2θ の回転．

$$BA = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = R(-2\theta),$$

すなわち BA は原点まわりの -2θ の回転．

5.3　2次曲線

問 1.　A，B を2次行列とする．$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ を示せ．

[解答例]

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とする．

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_3b_1 + a_4b_3 \\ a_1b_2 + a_2b_4 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

5.4　固有ベクトルと対角化

問 1.　例 2 の A を $P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ を用いて対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となることをたしかめよ．

[解答例]

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\theta\cdot\cos\theta + \sin 2\theta\cdot\sin\theta & -\cos 2\theta\cdot\sin\theta + \sin 2\theta\cdot\cos\theta \\ \sin 2\theta\cdot\cos\theta - \cos 2\theta\cdot\sin\theta & -\sin 2\theta\cdot\sin\theta - \cos 2\theta\cdot\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \sin\theta\cdot\cos\theta - \sin\theta\cdot\cos\theta \\ -\sin\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta & -\sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問 2.　例 3 の B を $P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2)$ を用いて対角化せよ．すなわち，$P^{-1}BP$ が対角行列となることをたしかめよ．

[解答例]

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
P^{-1}BP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5.5　固有方程式と固有ベクトル

問 1.　$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，B を対角化せよ．

[解答例]

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$$

$\Leftrightarrow\ (\lambda-8)(\lambda-4) = 0.$　ゆえに $\lambda = 8,\ 4.$

i)　$\lambda = 8$ のとき

$$\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 3u_1 + \sqrt{3}u_2 \\ \sqrt{3}u_1 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ u_2 = -\sqrt{3}u_1.$　これより $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$　$\cdots$ 固有ベクトル

ii)　$\lambda = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} u_1 - \sqrt{3}u_2 \\ -\sqrt{3}u_1 + 3u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ u_1 = \sqrt{3}u_2.$　これより $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$　$\cdots$ 固有ベクトル．

$P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$　とすれば　$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

問 2.　2 次曲線 $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4$ の概形を調べよ．

[解答例]

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^4 = 4 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4.$$

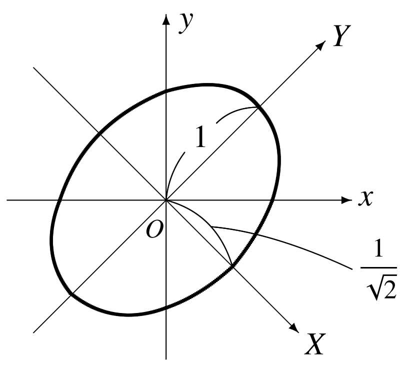
問 1 の結果を用いる．$P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = R\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ だから

$$\begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}R\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 4 \iff 8X^2 + 4Y^2 = 4 \iff \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + Y^2 = 1.$$

よって xy 座標を $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した XY 座標で見れば，長軸が Y 軸で，短軸が X 軸の楕円であることがわかる．



問題

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．また A^n を求めよ．

[解答例]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

$\Leftrightarrow\ (\lambda-2)(\lambda+1) = 0.\ \ \lambda = 2,\ -1.$

i)　$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} u_2 - 2u_1 \\ 2u_1 - u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $u_2 = 2u_1$．これより固有ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ii)　$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} u_2 + u_1 \\ 2u_1 + 2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $u_2 = -u_1$．これより固有ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot \cdots \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nP,$$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ だから

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

2.　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のトレースを $\mathrm{tr}A = a + d$ で定めた．$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$, $\mathrm{tr}BAB^{-1} = \mathrm{tr}A$（$|B| \neq 0$ のとき）を示せ.

[解答例]

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とする.

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\mathrm{tr}(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4.$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_1a_1 + b_2a_3 & b_1a_2 + b_2a_4 \\ b_3a_1 + b_4a_3 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\mathrm{tr}(BA) = a_1b_1 + b_2a_3 + b_3a_2 + a_4b_4 = \mathrm{tr}(AB).$$

$$B^{-1} = \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
BAB^{-1} &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\begin{pmatrix} b_1a_1 + b_2a_3 & b_1a_2 + b_2a_4 \\ b_3a_1 + b_4a_3 & b_3a_2 + b_4a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\begin{pmatrix} \begin{array}{c} b_4(b_1a_1 + b_2a_3) \\ -b_3(b_1a_2 + b_2a_4) \end{array} & \begin{array}{c} b_2(b_1a_1 + b_2a_3) \\ + b_1(b_1a_2 + b_2a_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} b_4(b_3a_1 + b_4a_3) \\ -b_3(b_3a_2 + b_4a_4) \end{array} & \begin{array}{c} - b_2(b_3a_1 + b_4a_3) \\ + b_1(b_3a_2 + b_4a_4) \end{array} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(BAB^{-1}) &= \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\Big(b_1b_4a_1 + b_1b_4a_4 - b_2b_3a_4 - b_2b_3a_1\Big) \\
&= \frac{1}{b_1b_4 - b_2b_3}\Big(b_1b_4 - b_2b_3\Big)(a_1 + a_4) = a_1 + a_4 = \mathrm{tr}A.
\end{aligned}$$

3.　対称行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$（$a$，$b$，$c$ は実数）と回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，θ を適当にとれば $R(-\theta)BR(\theta)$ がかならず対角行列になることを示せ．

[解答例]

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = R(-\theta)BR(\theta).$$

$$R(-\theta)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos^2\theta + b\sin 2\theta + c\sin^2\theta & b\cos 2\theta - \dfrac{a-c}{2}\sin 2\theta \\ b\cos 2\theta - \dfrac{a-c}{2}\sin 2\theta & a\sin^2\theta - b\sin 2\theta + c\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

これが対角ということは

$b\cos 2\theta = \dfrac{a-c}{2}\sin 2\theta$ であることが必要．

i)　$b = 0$ のとき．このときは B はそもそも対角．

ii)　$b \neq 0$ のとき

$\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta = \dfrac{a-c}{2b}$．これを満たす θ はとれる．

これを満たす θ をとれば対角化できる．

4.　$T^{\mathrm{T}}T = I$ を満たす（実）正方行列を直交行列という．T は 2 次行列としよう．

(1)　$T = (\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2)$ とかけば，この条件は $|\boldsymbol{u}_j| = 1$ かつ $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$ と（$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が直交する）同値であることをたしかめよ．また $|T| = \pm 1$ であることを示せ．

(2)　$A = \begin{pmatrix} -1/6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列 T を（あれば）すべて求めよ．

[解答例]

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} \text{とする}. \qquad T = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

(1) $$T^{\mathrm{T}}T = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^2 + u_{21}^2 & u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} \\ u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} & u_{12}^2 + u_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

よって $T^{\mathrm{T}}T = I \Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}^2 + u_{21}^2 = u_{12}^2 + u_{22}^2 = 1, \\ u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} = 0. \end{cases}$

すなわち，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = 1$，$\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2$（内積）$= 0$，ゆえに $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$.

$T^{\mathrm{T}}T = I$ は T^{T} が T の逆行列であることを示す．よって（4.2）と（4.3）から

$|T^{\mathrm{T}}T| = |T^{-1}||T| = |T|^2 = 1$.

ゆえに $|T| = \pm 1$.

(2) $$\begin{vmatrix} -\frac{1}{6} - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{6} - \lambda\right)(1 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{25}{6} = 0$$

$\Leftrightarrow\ 6\lambda^2 - 5\lambda - 25 = 0\ \Leftrightarrow\ (2\lambda - 5)(3\lambda + 5) = 0.$

$\lambda = \dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{3}.$

i) $\lambda = \dfrac{5}{2}$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_1.$$

ii) $\lambda = -\dfrac{5}{3}$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{3}\right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_2.$$

よって T としては $\pm\boldsymbol{u}_1$ と $\pm\boldsymbol{u}_2$ の組み合わせだけあり，

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

5.　楕円 $3x^2 + y^2 = 1$ を正の向きに $\pi/6$ ラジアン回転して得られる楕円の方程式を $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ と表わすとき，a，b，c を求めよ．

[解答例]

$$3x^2 + y^2 = 1 \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} R\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} R\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

よって正の向きに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させた楕円は

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

6.　つぎの 2 次曲線の概形をかけ．[ヒント：(2) では平行移動も考える]

(1)　$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 8.$

(2)　$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{5}(x - y) + 16 = 0.$

[解答例]

(1)　$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 8 \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8.$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$ を対角化する．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0, \qquad \lambda = 16,\ -4.$$

i) $\lambda = 16$ のとき，固有ベクトル（単位）は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

ii) $\lambda = -4$ のとき，固有ベクトル（単位）は $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

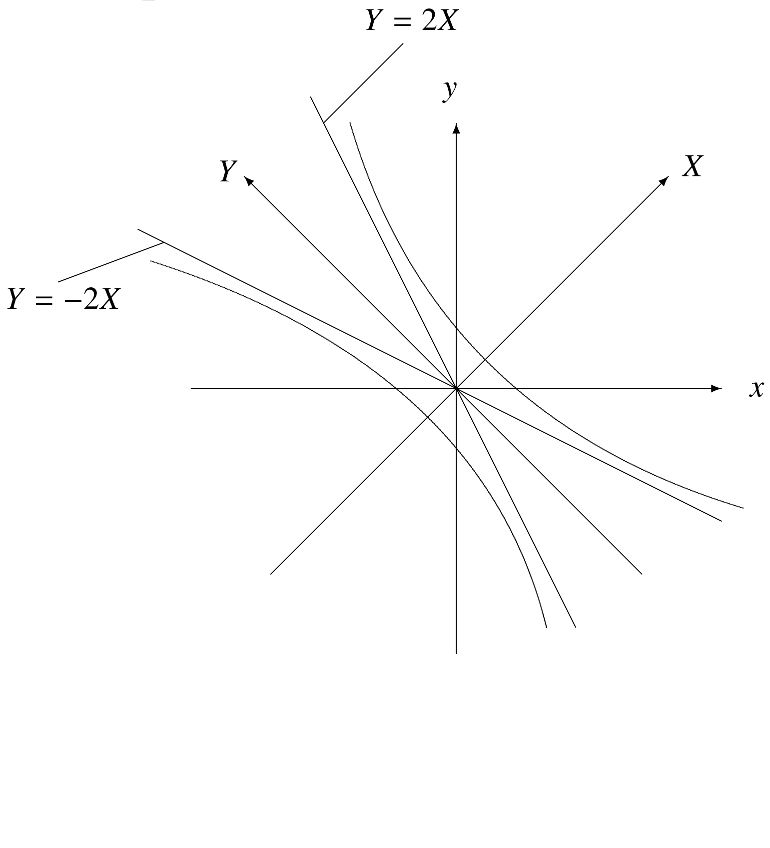
よって $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right)$ とすると

$$P^{\mathrm{T}}AP = R\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot A \cdot R\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，すなわち $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \iff \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 8.$$

よって $2X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 1$.



(2)　$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{5}(x - y) + 16 = 0.$

まず平行移動して x と y の 1 次の項を消す．そのため

$\begin{cases} x = \overline{x} + a, \\ y = \overline{y} + a \end{cases}$　なる新たな座標軸 $\overline{x}$，$\overline{y}$ を考える．

これをもとの式に代入して $\overline{x}$ と $\overline{y}$ の 1 次の項をぬき出すと

$(10a - 6b - 8\sqrt{5})\overline{x}$，$(10b - 6a + 8\sqrt{5})\overline{y}$,

これらの係数が 0 となる a，b は $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $b = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

よって $x = \overline{x} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$y = \overline{y} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ をもとの式に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = 4.$$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ を対角化する．

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda - 8)(\lambda - 2) = 0 \quad \therefore\ \lambda = 8,\ 2.$$

i)　$\lambda = 8$ のとき，単位固有ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii)　$\lambda = 2$ のとき，単位固有ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

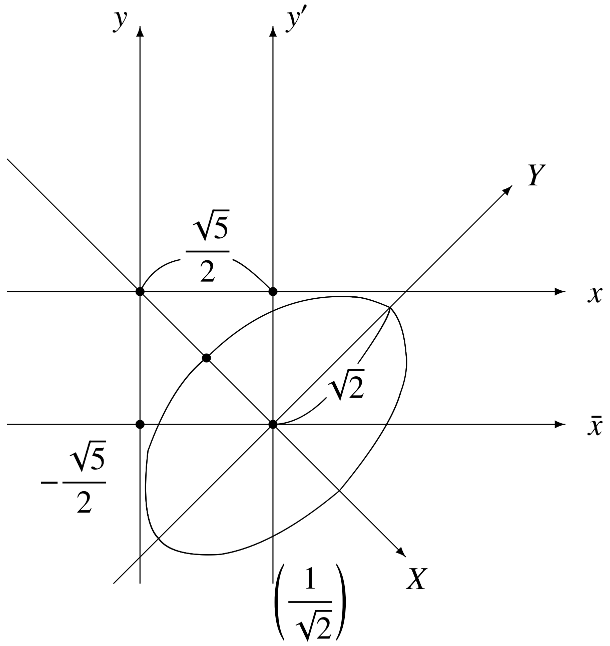
$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと

$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,　よって $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,　$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，

$$\begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix} = 4 \iff \begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = 4.$$

$$\therefore\ 2X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1 \iff \frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$



練習問題 A

1.　$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2$ を計算することによって，A が行列のとき，命題“$A^2 = O$ ならば $A = O$”は誤りであることを示せ．またこの命題を成り立たせない行列 A の例をもう 1 つみいだせ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\ \text{すなわち}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2 = 0.$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+dc & cb+d^2\end{pmatrix}.$$ これが 0 となるとき，

$$a^2 = -bc = d^2,\ ab + bd = (a+d)b = 0,\ ac + dc = (a+d)c = 0.$$

よって $a = -d$ とおけば最後の 2 つは満たされる．

また $a = 1$，$d = -1$ とすれば $-bc = 1$．これは $b = 1$，$c = -1$ で満たされる．実際

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.　$AB = I$ ならば $A^2B^2 = I$ であることを証明せよ．

[解答例]

$$A^2B^2 = AABB = A(AB)B = AIB = AB = I.$$

3.　点 $(0,\ 1)$ を点 $(-1,\ 3)$ へ，点 $(1,\ -1)$ を点 $(3,\ -4)$ へうつすような線形変換の行列を求めよ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1, \\ d = 3, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ c-3 \end{pmatrix}.\ \text{ゆえに}\ \begin{cases} a = 2, \\ c = -1. \end{cases}$$

よって $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

4.　点 $(3,\ 2)$ を原点のまわりにつぎの角だけ回転した点の座標を求めよ．

(1)　30°.　　(2)　-45°.　　(3)　150°.

[解答例]

(1)　$$\begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\sqrt{3} - 1 \\ \dfrac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(2)　$$\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(3)　$$\begin{pmatrix} \cos 150° & -\sin 150° \\ \sin 150° & \cos 150° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3\sqrt{3} - 2}{2} \\ \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

5.　つぎの関係式（1）を満たす数 x，y，u，v はかならず関係式（2）を満たし，また逆に,（2）を満たす数 x，y，u，v はかならず（1）を満たすとき，数 a，b，c，d を求めよ．

(1)　$\begin{cases} x = au + 5v, \\ y = 4u + bv. \end{cases}$　　(2)　$\begin{cases} u = cx - 5y, \\ v = dx + 3y. \end{cases}$

[解答例]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -5 \\ d & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -5 \\ d & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 5d & -5a + 15 \\ 4c + bd & -20 + 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} x = (ac + 5d)x + (-5a + 15)y, \\ y = (4c + bd)x + (-20 + 3b)y. \end{cases}$$

これが $x = 0$，$y = 1$ で成り立つことから $-5a + 15 = 0\ \Leftrightarrow\ a = 3$.

$1 = -20 + 3b\ \Leftrightarrow\ b = 7$.

また $y = 0$，$x = 1$ でも成立することから $4c + bd = 4c + 7d = 0$.

$1 = ac + 5d = 3c + 5d$．この 2 つの式より

$c = 7$，$d = -4$.

6.　行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換について，つぎの問に答えよ．

(1)　y 軸上の点は，どのような図形にうつされるか．

(2)　この線形変換で，直線 $y = kx$ 上の点がつねに直線 $y = kx$ 上にうつされるとき，k の値を求めよ．

[解答例]

(1)　y 軸は $x = 0$.

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 4y \end{pmatrix}$．よって直線 $Y = 2X$ にうつる．

(2)　$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2kx \\ x + 4kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 + 2k)x \\ (1 + 4k)x \end{pmatrix}$.

$Y = kX$ より $(1 + 4k)x = k(3 + 2k)x$.

これがすべての x で成り立つためには

$1 + 4k = k(3 + 2k)$

$\Leftrightarrow\ 2k^2 - k - 1 = 0\ \Leftrightarrow\ (2k + 1)(k - 1) = 0$

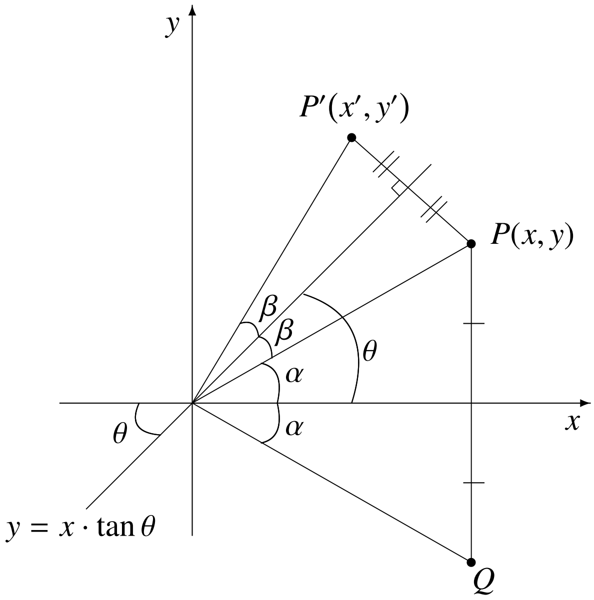
$\Leftrightarrow\ k = -\dfrac{1}{2},\ 1.$

7.　(1)　平面上で，点 P を x 軸に関して対称に移動し，さらに原点のまわりに角 2θ だけ回転した点を P' とすれば，P' は x 軸を角 θ だけ回転して得られる直線に関して，P と対称な位置にあることを示せ．

(2)　平面上で，原点のまわりに x 軸を角 θ だけ回転して得られる直線に関する対称移動を表わす線形変換の行列を求めよ．

[解答例]

(1) 図形的に求める．x 軸を θ だけ回転して得られる直線 $y = x\cdot\tan\theta$ である．



図のように θ を α と β に分解，すなわち $\theta = \alpha + \beta$ とする．また P と x 軸対称な点を Q とする．すると P' は Q を原点まわりに 2θ だけ回転した点であり，$2\theta = 2(\alpha + \beta)$.

x 軸と OQ がなす角は対称性により α．よって直線 $y = x\cdot\tan\theta$ と OP' がなす角は β となる．これは P' が P と $y = x\cdot\tan\theta$ に対して対称な位置にあることを示している．

(2) 1 で $Q(\tilde{x}, \tilde{y})$ とすると

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

P' は Q を原点まわりに 2θ だけ回転させたものだから

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって求める行列は $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

練習問題 B

1.　2×2 型の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$s = a + d$，$t = ad - bc$ とおけば，I を2次の単位行列として，つぎの等式が成り立つことを証明せよ．

$$A^2 - sA + tI = O.$$

[解答例]

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cd + d^2 \end{pmatrix}.$$

よって

$$A^2 - sA + tI = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a + d)a & (a + d)b \\ (a + d)c & (a + d)d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

2.　(1)　任意の2次元の列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，つねに $X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ となる行列 X を求めよ．

(2)　任意の2次の正方行列 A に対して，つねに $XA = AX$ となる行列 X は，k を任意の数，I を2次の単位行列として，$X = kI$ という形をもつことを証明せよ．

[解答例]

(1)　$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ とする．

$$\boldsymbol{Xu} = \boldsymbol{u} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} au_1 + bu_2 - u_1 \\ cu_1 + du_2 - u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\iff \begin{cases} (a-1)u_1 + bu_2 = 0, \\ cu_1 + (d-1)u_2 = 0. \end{cases}$　これが任意の u_1，u_2 で成り立つことから

i)　$u_1 = 0$，$u_2 = 1$ として $b = 0$，$d = 1$.

ii)　$u_1 = 1$，$u_2 = 0$ として $c = 0$，$a = 1$.

よって $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2)　k_1，k_2 を任意の実数として，$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ とすれば

$$AX = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1x_1 & k_1x_2 \\ k_2x_3 & k_2x_4 \end{pmatrix}.$$

$$XA = \begin{pmatrix} k_1x_1 & k_2x_2 \\ k_1x_3 & k_2x_4 \end{pmatrix}.$$

$AX = XA$ より，$k_1x_2 = k_2x_2$，$k_2x_3 = k_1x_3$．これらが任意の k_1，k_2 で成立するので $x_2 = x_3 = 0$.

今度は $A = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ とすると，$XA = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_2x_1 \\ 0 & k_2x_4 \end{pmatrix}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1x_4 \\ 0 & k_2x_4 \end{pmatrix}.$$

$AX = XA$ より $k_1x_4 = k_1x_1$．$\therefore\ x_1 = x_4$.

3.　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に，それぞれどのような行列を左からかければ，つぎの行列が得られるか.

(1) $\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}$.　　(5) $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

[解答例]

(1) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ck & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

4.　t を媒介変数とする直線 l の方程式が $\begin{cases} x = 4+2t, \\ y = 3+t \end{cases}$ であるとき，行列 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の表わす線形変換によって，l はどのような図形にうつされるか.

[解答例]

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-3y \\ -2x+2y \end{pmatrix}$$

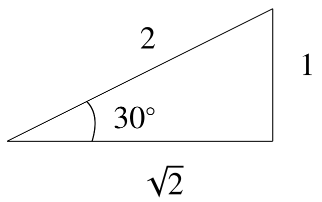
$$= \begin{pmatrix} 4(4+2t)-3(3+t) \\ -2(4+2t)+2(3+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+7 \\ -2t-2 \end{pmatrix}.$$

よって直線 $\begin{cases} x = 5t+7, \\ y = -2t-2 \end{cases}$ にうつされる.

付録A　三角関数の加法定理・2倍角の公式・半角の公式

問 1.　加法定理を用いて，$\sin(45^\circ + 30^\circ)$，$\cos(60^\circ + 45^\circ)$ の値を計算せよ．

[解答例]



$$\begin{aligned}\sin(45^\circ + 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}. \\ \cos(60^\circ + 45^\circ) &= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}.\end{aligned}$$

問 2.　原点を中心とする相似比 k の相似変換を f，原点のまわりの角 θ の回転を g とする．合成変換 $f \circ g$ の行列を求めよ．

[解答例]

f の行列は $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$，$g$ の行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

よって $f \circ g$ の行列は，$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix}$.

問 3.　正接の加法定理を証明せよ.

[解答例]

$\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$ とする.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\cos\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 \mp \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

問 4.　$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて，$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$，$\tan 15^\circ$ を求めよ.

[解答例]

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

$\sin 15^\circ > 0$ より

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

$$\left((\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{3}).\ \text{よって}\ \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right).$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

$\cos 15^\circ > 0$ より

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}.$$

付録B　行列の演算と群

問 1.　例 4 の群の単位元と，4 つの要素それぞれの逆元をいえ．

[解答例]

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

問 2.　つぎの 2 つの行列の集合が乗法について群をなすことをたしかめよ．

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

[解答例]

(1)　$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

(2)　行列のかけ算は結合法則を満たし，かつ上の（1）から．

(3)　$e = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$.　単位元．

(4)　$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$,　逆元，　$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$,　逆元．

問題

1. つぎの集合は乗法について群をなすことを示せ.

$$\{1,\ -1,\ i,\ -i\}.$$

[解答例]

(1) $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1$, $1 \cdot (i) = (i) \cdot 1 = i$, $1 \cdot (-i) = (-i) \cdot 1 = -i$ など以下の表.

	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

(2) 結合法則は，複素数の結合法則と（1）の結果より.

(3) 単位元は 1.

(4) 逆元は（1）の表より

$$1 \to 1,\ -1 \to -1,\ i \to -i,\ -i \to i.$$

2. a，b が実数で，$ab = 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

の型の行列の集合は乗法について群をなすことを示せ.

[解答例]

1. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix}$, $(a_1a_2)(b_1b_2) = (a_1b_1)(a_2b_1) = 1\cdot 1 = 1$.

2. 行列のかけ算なので結合法則が成り立つ.

3. 単位元は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の逆元は $\dfrac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}$,　$\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab} = 1$.

3.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

が行列の乗法について群をなすことを証明せよ.

[解答例]

あたえられた集合の要素である各行列は $\boldsymbol{R}^2$ の点 $(x,\ y)$ を移動させる．この移動は,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: 恒等,

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$: y 軸対称,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$: x 軸対称,

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$: 原点対称（原点まわり 180° 回転）,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 直線 $y = x$ 対称,

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$$: 原点まわりに 90° 回転,

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}$$: 原点まわりに −90° 回転,

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\ -x\end{pmatrix}$$: 直線 $y=-x$ 対称.

これら移動の合成を考えるか，あるいは直接の計算を行なって乗算表をつくると

	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$

すなわち，

(1)　任意の 2 つの要素（行列）の積はあたえられた集合の要素となり乗法について閉じている．

(2)　行列の積なので結合法則が成り立つ．

(3)　単位元は $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4)　上の乗法表のどの行についても $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が 1 つだけあり，逆行列すなわち逆元の存在がいえる．

4.　つぎの集合は,（　）の中の演算について群をなすことを示せ．

(1)　正の実数全体.（乗法）

(2)　整数全体.（加法）

(3)　2×3 型の行列の全体.（加法）

[解答例]

(1)　(a) x，y を正の実数とすると，$x \cdot y$ は正の実数.

　(b) かけ算なので結合法則が成り立つ.

　(c) 単位元は 1.

　(d) x に対し，$\dfrac{1}{x}$ が逆元.

(2)　(a) 整数と整数の和は整数.

　(b) たし算なので結合法則が成り立つ.

　(c) 単位元は 0.

　(d) z に対し $-z$ が逆元.

(3)　(a) 2×3 型の行列どうしの和は 2×3 型の行列.

　(b) 行列の和なので結合法則が成り立つ.

　(c) 単位元はゼロ行列.

　(d) A に対し $-A$ が逆元.

付録C　ジョルダン標準形

C.1　ジョルダンの標準形

問 1.　2 次行列に対するケーリーハミルトンの定理をたしかめよ.

[解答例]

練習問題 B の 1 の解答例を見よ.

問 2.　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化できないことを示し，行列 P を適当にとり $P^{-1}AP$ がジョルダンの標準形となるようにせよ.

[解答例]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

よって A の固有値は 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ -u_1 + u_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad \therefore\ u_1 = u_2.$$

よって固有ベクトルは $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のスカラー倍だけであるので対角化できない.

ジョルダンの標準形を求めるため

$(A - I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$

となる $\boldsymbol{w}$ を求める.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -w_1 + w_2 \\ -w_1 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより，たとえば $w_1 = -1$，$w_2 = 0$ とした $\boldsymbol{w} = (-1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$.

よって $P = (\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として，$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ であり，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.