線形代数入門

2次正方行列を対象として

関西学院大学
教授　岡留　剛

本資料は，大学 1 年生のために，高校の数学と大学の数学の橋渡しを念頭において，線形代数の入門書として執筆されたものです．第 1 章から第 3 章までは主に小平邦彦編「数学 IIB」東京書籍，1974 を，また第 4 章と第 5 章は長谷川浩司「線型代数 [改訂版]」日本評論社，2015 をもとに作成しました．ただし第 3 章は，Kodaira, K. (Ed.)“Algebra and Geometry: Japanese Grade II，”American Mathematical Society, 1996 を参考に補いました．

本資料の tex 化で秘書の堀口恵子さんにお世話になりました．ここにお礼を申し上げます．なお，著作権の問題があるので，本資料の電子的な複製や再配布は行なわないでください．

2019 年 9 月 24 日
岡留　剛

目 次

第1章　行列

1.1　行列の意味

平面上のベクトルや，空間におけるベクトルの成分表示は，いくつかの数を横に 1 列にならべたものである．この章では，いくつかの数を長方形状に配列したものについて考えてみよう．

例 **1.**　表 1.1 は，2 つの町 P，Q におけるある年度の電力使用量を調べたものである．

	4 月〜6 月	7 月〜9 月	10 月〜12 月	1 月〜3 月
P 町	1018	1222	1065	1125
Q 町	778	918	877	807

（単位　万キロワット時）

表 1.1．P 町と Q 町のある年度の電力使用量．

このような比較を毎年行なうには，上の表の数値のところだけを空欄にした表をいくつも用意しておいて，それに毎年の使用量をかきこめばよい．

かきこむ数だけをとりだせば，つぎのような 8 個の数の長方形状の配列となる．

$$\begin{array}{cccc} 1018 & 1222 & 1065 & 1125 \\ 778 & 918 & 877 & 807. \end{array}$$

例 1 のような数の配列にまとまりをつけるため，つぎのように両側をかっこでかこんで表わすことにする．

$$\begin{pmatrix} 1018 & 1222 & 1065 & 1125 \\ 778 & 918 & 877 & 807 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

例 2.　下の図 1.1 は，A，B，C の 3 地点をつなぐ自動車道路を示している．矢印のついているところは一方通行である．

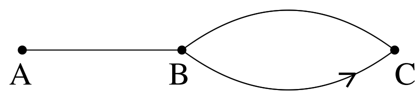


図 1.1．A，B，C の 3 地点をつなぐ道．

この自動車道路をとおって，各地点から各地点へほかの地点をとおらずに行ける道が，何とおりあるかを数え，まとめたものが表 1.2 である．

		到着地点		
		A	B	C
出発地点	A	0	1	0
	B	1	0	2
	C	0	1	0

表 1.2．A，B，C の各地点から，ほかの地点へほかの地点をとおらずに行ける道の数．

この表から数値だけをとりだせば

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

という配列になる．

（1.1）や（1.2）のように，いくつかの数を長方形状に配列したものを**行列**という．

行列において，数の横のならびを行とよび，上から順に**第 1 行**，**第 2 行**，... という．

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{第 1 行}} \\ \boxed{\text{第 2 行}} \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$$

また，数の縦のならびを**列**とよび，左から順に**第1列**，**第2列**，... という．

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\text{第}\\1\\\text{列}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\text{第}\\2\\\text{列}\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\text{第}\\3\\\text{列}\end{matrix}} & \vdots \end{pmatrix}$$

（1.1）の行列は，2つの行と4つの列をもっている．

そこで，このような行列を，**2行4列**の行列，または **2×4型**の行列という．

同様に,（1.2）のような行列を，**3行3列**の行列，または **3×3型**の行列という．

一般に，行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**といい，2×2型の行列を2次の正方行列，3×3型の行列を3次の正方行列ともいう．

問1.　つぎの行列の型をいえ．

$$（1）\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad （2）\begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 4 & 2.7 \\ 3 & 3.6 \end{pmatrix}. \qquad （3）\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

とくに，1行だけからなる行列を**行ベクトル**（または横ベクトル）といい，たとえば，1×4型の行列を**4次元**の行ベクトルという．

同様に，1列だけからなる行列を**列ベクトル**（または縦ベクトル）といい，たとえば，3×1型の行列を**3次元**の列ベクトルという．

行ベクトルや列ベクトルを，**数ベクトル**または単に**ベクトル**という．

例3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

は3次元の行ベクトルである[*]．

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

は2次元の列ベクトルである．

問2.　つぎのベクトルの次元をいえ．また，それは行ベクトルであるか，列ベクトルであるか．

[*]行列の記法にあわせて，ベクトルの成分を区切るコンマははぶいた．

（1）$\begin{pmatrix}12 & 22\end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix}25\\40\\2\end{pmatrix}$.　　（3）$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

行列の第 1 行，第 2 行，... を，第 1 行ベクトル，第 2 行ベクトル，... ともいう．列についても同様に第 1 列ベクトル，第 2 列ベクトル，... ともいう．

問 3.　例 2 の行列（1.2）について，第 1，第 2，第 3 行ベクトルおよび第 1，第 2，第 3 列ベクトルをかけ．

一般に，行列の第 i 行と第 j 列の交差点にある数を，その行列の (i, j) **成分**または (i, j) **要素**という．行列の要素は一般に複素数である．物理学などでは要素が複素数の行列をあつかうことが多い．それに対し，工学関連の分野では行列の要素は実数であることが大半である．本資料では，要素が実数の行列をあつかう．

例 4.　右の 2×3 型の行列で，
$(1, 1)$ 成分は 13，
$(1, 2)$ 成分は -5，
$(2, 3)$ 成分は 0
である．

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}\text{第 1 列} & \text{第 2 列} & \text{第 3 列}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{第 1 行} \to \\ \text{第 2 行} \to\end{array} & \begin{pmatrix}13 & -5 & 2\\ 9 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

行列を表わすのに，その (i, j) 成分を a_{ij} のようにかくことがある．この記法によれば，たとえば，2×3 型の行列は

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

のように表わされる．

また，行列を 1 つの大文字で

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

などのように表わすことも多い．

行列の相等

2 つの行列 A，B がおなじ型で，しかも対応する成分がそれぞれ等しいとき，A と B は等しいといって，

$$A = B$$

とかく．

例 **5.**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 2 & d \end{pmatrix}$$

は $a = -1$，$b = 2$，$c = 0$，$d = 1$ であることと同値である．

問 **4.** $\begin{pmatrix} x & 2y \\ z & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & u \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$

のとき，x，y，z，u の値はそれぞれいくらか．

1.2　行列の加減と実数倍

行列の加法・減法

4 月	P	Q	R
第 1 工場	5.7	2.4	1.7
第 2 工場	8.5	4.3	2.8

5 月	P	Q	R
第 1 工場	6.0	2.2	2.0
第 2 工場	8.2	4.5	3.0

表 1.3．ある工場における製品の生産量．

例 **1.**　表 1.3 は，ある工場における製品の生産量を 4 月と 5 月について調べたものである．製品には P，Q，R の 3 種類があり，工場には，第 1 工場と第 2 工場の 2 つがある（単位はトン）．

上の表から，4 月と 5 月をあわせた生産量を調べると，

第 1 工場における製品 P の生産量は　$5.7 + 6.0 = 11.7$

第 2 工場における製品 Q の生産量は　$4.3 + 4.5 = 8.8$

などとなる．これらをまとめれば

4 月・5 月	P	Q	R
第 1 工場	11.7	4.6	3.7
第 2 工場	16.7	8.8	5.8

すなわち，4 月と 5 月の生産量を表わす 2 つの行列

$$\begin{pmatrix} 5.7 & 2.4 & 1.7 \\ 8.5 & 4.3 & 2.8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6.0 & 2.2 & 2.0 \\ 8.2 & 4.5 & 3.0 \end{pmatrix}$$

のそれぞれ対応する成分をくわえることによって，両月をあわせた生産量を表わす行列

$$\begin{pmatrix} 5.7+6.0 & 2.4+2.2 & 1.7+2.0 \\ 8.5+8.2 & 4.3+4.5 & 2.8+3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.7 & 4.6 & 3.7 \\ 16.7 & 8.8 & 5.8 \end{pmatrix}$$

が得られる．

前ページの例 1 の考えにもとづいて，おなじ型の行列 A と B の和 $A+B$ をつぎのように定める．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

行列の和

一般の型の行列の和もおなじように，成分ごとにくわえればよい．

注意.　行列 A，B の和 $A+B$ は，A と B がおなじ型である場合にだけ定義されている．たとえば，2×2 型の行列と 2×3 型の行列はくわえることができない．

問 1.　つぎの行列 A，B の和を求めよ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

（3）$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$

（4）$A = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$

行列の加法については，ベクトルの加法と同様に，つぎの法則が成り立つ．

（1）	$A + B = B + A.$	（交換法則）
（2）	$(A + B) + C = A + (B + C).$	（結合法則）

また，行列の加法において，数の 0 に相当するものは，すべての成分が 0 の行列である．このような行列を**零（ゼロ）行列**という．

たとえば

2 × 2 型の零（ゼロ）行列は　$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

2 × 3 型の零（ゼロ）行列は　$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

これらは行列として等しくはないが，混同するおそれがなければいずれも O で表わす．

明らかに，任意の行列 A に対して

$$A + O = O + A = A,$$

ただし，O は A とおなじ型の零（ゼロ）行列である．

A，B がおなじ型の行列であるとき，

$$B + X = A$$

を満たす行列 X を A から B をひいた**差**といい，$A - B$ とかく．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$ に対して

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{pmatrix}.$$

行列の差

とくに，$O - A$ を $-A$ とかく．すなわち

$$A + X = O$$

となる行列 X が $-A$ である．

$-A$ は A の各成分の符号をかえた行列である．また，$A - B$ は $A + (-B)$ に等しい．

例 2.　$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ならば　$-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問 2.　つぎの行列 A，B に対して，$A - B$ を求めよ．また $-A$ を求めよ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

（2）$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

問 3.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$B + X = A$ が成り立つような行列 X を求めよ．

行列の実数倍

例 3.　例 1 の工場で，6 月の生産量を，どの部門についても 5 月の生産量の 10% 増しにすることを計画した．その場合，6 月の生産計画を表わす行列は，5 月の生産量を表わす行列

$$\begin{pmatrix} 6.0 & 2.2 & 2.0 \\ 8.2 & 4.5 & 3.0 \end{pmatrix}$$

の各成分を 1.1 倍した行列

$$\begin{pmatrix} 6.6 & 2.42 & 2.2 \\ 9.02 & 4.95 & 3.3 \end{pmatrix}$$

である．

一般に，実数 k に対して，行列 A を $\boldsymbol{k}$ 倍したもの kA をつぎのように定める．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ に対して } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}.$$

行列の実数倍

例 4.　$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$　に対して　$2A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

問 4.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，$3A$ および $\dfrac{1}{2}A$ を求めよ．

行列の実数倍の定義から

$1A = A, \qquad (-1)A = -A,$

$0A = O, \qquad kO = O.$

行列の加法と実数倍については，ベクトルの場合と同様に，つぎの法則が成り立つ．ただし，k，l は実数，A，B はおなじ型の行列である．

（1）$(kl)A = k(lA)$.　（結合法則）

（2）$(k + l)A = kA + lA$.

（3）$k(A + B) = kA + kB$.　（分配法則）

実数と行列の積

問 5.　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ として，$k(A + B) = kA + kB$ をたしかめよ．

問 6.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，つぎの行列

を求めよ．

（1）$3A - B + 2C$.　　（2）$2(A - B + 2C) + B - 3C$.

1.3　行列の乗法

例 1.　表 1.4 は，2 種類の商品（ノート，鉛筆）の単価を示している．

商品	ノート	鉛筆
単価（円）	50	20

表 1.4．ノートと鉛筆の単価.

この表から単価を示す行ベクトル

$$\begin{pmatrix} 50 & 20 \end{pmatrix}$$

が得られる．

いま，ある人がノートを 3 冊，鉛筆を 5 本買うとする．この人の買い方を示す表を，上の単価を示す表と区別するため，表 1.5 のようにかくことにする．

ノート（冊）	3
鉛筆（本）	5

表 1.5．ある人のノートと鉛筆のそれぞれの購入個数.

この表から，買い方を示す列ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が得られる．

この人が支払う代金はつぎのように計算される．

$$50 \times 3 + 20 \times 5 = 250\,(\text{円}).$$

例 1 は，単価を示す行ベクトルと買い方を示す列ベクトルとがあたえられたとき，支払う代金は，2 つのベクトルの対応する成分の積をくわえることによって求められることを示している．

このような考えにもとづいて，行ベクトルと列ベクトルの積をつぎのように定める．

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

右辺は 1×1 型の行列の ( ) を省略したものである．すなわち，前ページのことは，1×2 型の行列と 2×1 型の行列の積は 1×1 型の行列となることを表わしている．

ほかの次元の行ベクトルと列ベクトルの積も，それらの次元が一致するとき上と同様に定められる．

例 2.　$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\times(-1) + 5\times 3 = 13.$

問 1.　つぎの積を計算せよ．

（1）$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$　　（2）$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$

例 3.　A と B の 2 軒の商店があって，商品の単価が店によってことなり，表 1.6 のようになっているとする．

また，甲，乙の 2 人が買いたい数量は，表 1.7 のようであるとする．

単価（円）	ノート	鉛筆
A 店	50	20
B 店	53	18

表 1.6. A 店と B 店の商品単価.

数量	甲	乙
ノート（冊）	3	2
鉛筆（本）	5	10

表 1.7. 甲と乙の 2 人の購入希望数.

この 2 つの表から，甲，乙が A または B の店で買う場合の代金を計算すると，つぎのようになる．

（1）　A 店で甲が買う場合

$$\begin{pmatrix} 50 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 250.$$

（2）　A 店で乙が買う場合

$$\begin{pmatrix} 50 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 300.$$

（3）　B 店で甲が買う場合

$$\begin{pmatrix} 53 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 249.$$

（4）　B 店で乙が買う場合

$$\begin{pmatrix} 53 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 286.$$

上の計算から，それぞれの場合に支払う代金の一覧表は，つぎの表 1.8 となる．

代金（円）	甲	乙
A 店	250	300
B 店	249	286

表 1.8. 甲と乙が支払う代金.

上の例は，2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 53 & 18 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

から，A の各行ベクトルと B の各列ベクトルの積をつくることによって，行列

$$\begin{pmatrix} 250 & 300 \\ 249 & 286 \end{pmatrix}$$

が得られることを示している．

この行列の成分は，

(1, 1) 成分　A の第 1 行ベクトルと B の第 1 列ベクトルの積，

(1, 2) 成分　A の第 1 行ベクトルと B の第 2 列ベクトルの積，

(2, 1) 成分　A の第 2 行ベクトルと B の第 1 列ベクトルの積，

(2, 2) 成分　A の第 2 行ベクトルと B の第 2 列ベクトルの積

である．

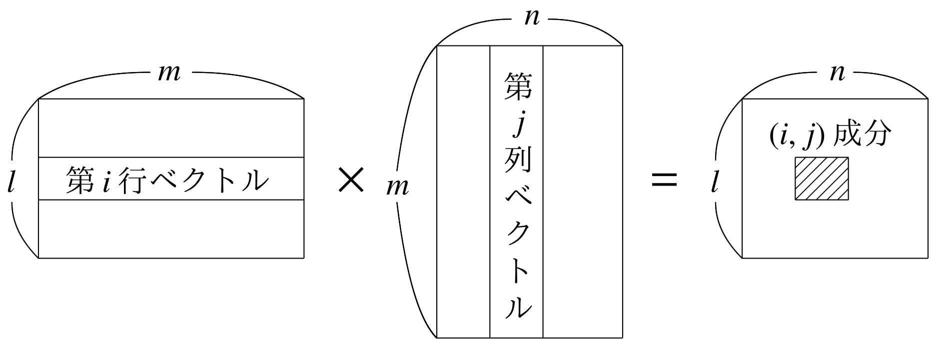
この例のような考えにもとづいて，2×2 型の行列 A と B の積 $\boldsymbol{AB}$ をつぎのように定める．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

行列の積

上と同様な考えによって，一般に，行列 A の列の個数と行列 B の行の個数とが一致している場合は，それらの積 AB が定められる．



すなわち

- 行列 A と行列 B の積 AB は，A の列の個数と B の行の個数とが一致している場合だけ定義される．
- $l \times m$ の行列と，$m \times n$ の積は $l \times n$ の行列となる．
- 行列 AB の (i, j) 成分は A の第 i 行ベクトルと B の第 j 列ベクトルの積である．

積の (i, j) 成分

例題.　つぎの行列の積を計算せよ．

（1）　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.　　（2）　$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

（3）　$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$.

［解］　（1）
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 5 & 1\cdot 4 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 5 & 3\cdot 4 + 4\cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 38 & 24 \end{pmatrix}.$$

（2）
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 1\cdot 5 \\ 1\cdot 4 + 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 1\cdot 1 \\ -2\cdot 3 & -2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

問 2.　つぎの行列の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.　(4) $\begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ -0.7 & -0.8 \end{pmatrix}$.

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.　(6) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

注意.　行ベクトル $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ の積 $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ は $ac+bd$（スカラー，すなわちただの数）である．それに対し，積 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{pmatrix}$ で行列となる．

1.4　乗法の性質

前項で行列の乗法を定義したが，この項では，とくに 2×2 型の行列について，乗法のいろいろな性質を調べてみよう．

行列の積について，つぎの法則が成り立つ．ただし，A，B，C は和や積が定義されるような任意の行列，k は任意の実数である．

- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
- $(AB)C = A(BC)$.　（結合法則）
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.　（分配法則）

A，B，C を 2×2 型の行列とし，

$$A(B + C) = AB + AC$$

を証明してみよう．いま

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$B + C = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix}$$

であるから，$A(B + C)$ の $(1, 1)$ 成分は

$$a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}). \tag{1.3}$$

一方，$AB + AC$ の $(1, 1)$ 成分は，AB と $AC(1, 1)$ 成分の和

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21}) \tag{1.4}$$

である.（1.3）,（1.4）をくらべると明らかに等しい.

同様にして，$A(B+C)$ と $AB+AC$ の $(1,2)$ 成分，$(2,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分はそれぞれ等しい．ゆえに

$$A(B + C) = AB + AC.$$

問 1.　A，B，C を 2×2 型の行列とし，上にならって

$$AB - AC = A(B - C)$$

を証明せよ.

問 2.　A，B，C を 2×2 型の行列とし，$(AB)C = A(BC)$ を証明せよ.

問 3.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,　$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

のとき，つぎの式をなるべく簡単な方法で計算せよ.

（1）$AC + BC$.　（2）$AB - AC$.　（3）$ABAB$.

例題.　つぎの行列 A，B について，積 AB および BA を計算して等しくないことをたしかめよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[解]

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって，$AB \neq BA$ である．

上の例題からわかるように，行列の積においては，交換法則 $AB = BA$ は一般には成り立たない．

問 4.　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
については，$AB = BA$ が成り立つことをたしかめよ．

単位行列と零（ゼロ）行列

2×2 型の行列の演算において，数の 1 に相当するものはつぎの行列である．

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列 I を**単位行列**とよぶ．

A がどんな 2×2 型の行列であっても，

$$AI = IA = A$$

が成り立つ．

問 5.　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ として　$AI = IA = A$ をたしかめよ．

数の 0 に相当するものは，前に述べた零（ゼロ）行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．A がどんな 2×2 型の行列であっても

$$AO = OA = O$$

が成り立つ．

問 6.　上のことをたしかめよ．

数の演算においては，

$$a \neq 0,\ b \neq 0 \quad \text{ならば} \quad ab \neq 0$$

であった．

しかし，行列の演算では，$A \neq O$，$B \neq O$ であっても $AB = O$ となることがある．

例 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち

$$A \neq O,\ B \neq O \quad \text{であるが} \quad AB = O.$$

問 7.

$$A = \begin{pmatrix} a & ak \\ b & bk \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$$

のとき，あたえられた任意の a，b，k，c，d に対して，

$$AB = O$$

となるように x，y を定めよ．ただし，$ab \neq 0$ とする．

問 8.　“$A \neq O$，$AB = AC$　ならば　$B = C$”
という命題が成り立たないことを，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

としてたしかめよ．

問題

1.　つぎの行列を計算せよ．

（1）$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.　　（2）$3\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.　つぎの等式が成り立つように，a，b，c，d の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2c & 3 \end{pmatrix}.$$

3.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
のとき

$$2B - X = X - (A + B)$$

となる行列 X を求めよ．

4.　つぎの行列の積を計算せよ．

（1）$\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix}4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$.

（3）$\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.　　（4）$\begin{pmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\2 & -5\end{pmatrix}$.

（5）$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}$.　　（6）$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -2\\-6 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

5.　$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{pmatrix}$

として，つぎの行列を計算せよ．ただし，A^2 は AA を表わす．

（1）A^2.　（2）$A^2 - B^2$.　（3）$(A+B)(A-B)$.

6.　$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & h\\h & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を計算せよ．

第2章　逆行列と連立1次方程式

2.1　逆行列

行列の加法，減法，乗法について 1 章で学んだが，行列の除法はできるであろうか．2×2 型の行列について考えよう．

数の演算では，a でわることは a の逆数をかけることとおなじであり，数 a の逆数とは

$$ab = ba = 1$$

を満たす数 b であった．そこで，2×2 型の行列 A に対して

$$AB = BA = I \quad (I \text{ は単位行列})$$

を満たす行列 B が存在するならば，B を A の**逆行列**といい，A^{-1} という記号で表わす．すなわち

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

例 **1.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

について，逆行列を求めてみよう．

A の逆行列が存在すると仮定して，

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

であるから，（2.1）の両端の行列が等しいことを用いて

$$\begin{cases} ax + by = 1, & [1] \\ cx + dy = 0, & [2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} au + bv = 0, & [3] \\ cu + dv = 1 & [4] \end{cases}$$

が得られる．

$$\begin{array}{lll} [1] \times d - [2] \times b \text{ より} & (ad - bc)x = d, & [5] \\ [2] \times a - [1] \times c \text{ より} & (ad - bc)y = -c, & [6] \\ [3] \times d - [4] \times b \text{ より} & (ad - bc)u = -b, & [7] \\ [4] \times a - [3] \times c \text{ より} & (ad - bc)v = a. & [8] \end{array}$$

（i）　$ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \qquad y = \frac{-c}{ad - bc},$$

$$u = \frac{-b}{ad - bc}, \qquad v = \frac{a}{ad - bc}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

（2.2）が（2.1）を満たすことは容易にたしかめられる．

したがって,（2.2）は行列 A の逆行列である．

（ii）　$ad - bc = 0$ のとき

[5]，[6]，[7]，[8] より

$$a = b = c = d = 0$$

となり，これは [1]，[4] と矛盾する．

ゆえに，逆行列が存在し，かつ

$$ad - bc = 0$$

となることはない．

したがって，$ad - bc = 0$ のとき，逆行列は存在しない．

注意.　（2.2）は（2.1）の両端の行列が等しいことだけを用いて得られた．したがって，2 次の正方行列 A と X について，$AX = I$ ならば X は A の逆行列であることが証明されたのである．

問 1.　（2.2）が（2.1）を満たすことを，実際に計算してたしかめよ．

問 2.　上と同様な方法で，2 次の正方行列 X と A について，$XA = I$ ならば X は A の逆行列であることを証明せよ．

上の結論を述べれば

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$D = ad - bc$ とおけば，

（1）　$D \neq 0$ ならば $A^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

（2）　$D = 0$ ならば A の逆行列は存在しない．

逆行列の公式

例題.　つぎの各行列について，逆行列があればそれを求めよ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.　　（2）$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

[解]　　（1）$1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$ であるから逆行列は存在する．
逆行列は公式により

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

（2）$2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$ であるから逆行列は存在しない．

問 3.　　つぎの行列に逆行列があれば，それを求めよ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.　　（2）$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（3）$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.　　（4）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2　連立 1 次方程式

x，y を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q \end{cases} \tag{2.3}$$

に対して，行列を応用してこの方程式をとくことを考えてみよう．
行列の積の定義によって

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

したがって，（2.3）はつぎのように表わされる．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおけば*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}. \tag{2.4}$$

連立方程式（2.3）をとくことは,（2.4）を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めることである.

A の逆行列 A^{-1} が存在する場合には,（2.4）の両辺に左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{p}$$

となり，この式の左辺を

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

と変形すれば

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{p}. \tag{2.5}$$

逆に,（2.4）の左辺の $\boldsymbol{x}$ に $A^{-1}\boldsymbol{p}$ を代入すると

$$A(A^{-1}\boldsymbol{p}) = (AA^{-1})\boldsymbol{p} = I\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$$

となり，（2.5）が（2.4）を満たすことがわかる.

例題.　前ページの方法によって，つぎの連立 1 次方程式をとけ.

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

[解]　あたえられた方程式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

と表わされる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 7 \neq 0.$$

*ベクトルは行列の特別な場合であるが，しばしば一般の行列と区別して，このように太文字の小文字で表わすことがある.

したがって，逆行列の公式により

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

答　$x = 3$，$y = 2$.

問 1.　つぎの連立 1 次方程式を，上の例題の解法にならってとけ.

（1）$\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 5x - 3y = 17. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x - 2y = -10, \\ 3x + 4y = 0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x - 3y = 23. \end{cases}$

2.3　ガウスの消去法（掃き出し法）

連立 1 次方程式の高速解法

数係数の連立 1 次方程式の数値解を求める場合に，逆行列を計算する方法はかならずしも最良の方法とはいえない．いま，つぎのような加減法による未知数の消去によってといてみよう．

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x + 4y = 30, & [1] \\ 5x + 7y = 52. & [2] \end{cases}$$

まず，$[1] \times \dfrac{1}{3}$ をつくり [3] とおけば，つぎの連立方程式 (II) が得られる.

$$\text{(II)} \begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, & [3] \\ 5x + 7y = 52. & [2] \end{cases}$$

つぎに，$[2] + [3] \times (-5)$ をつくり [4] とおけば，

$$(5x + 7y) + \left(-5x - \frac{20}{3}y \right) = 52 + (-50).$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}y = 2. \qquad [4]$$

したがって，つぎの連立方程式 (Ⅲ) が得られる．

$$(\text{Ⅲ})\ \begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, & [3] \\ \dfrac{1}{3}y = 2. & [4] \end{cases}$$

つぎに，[4]×3 をつくり [5] とおけば，つぎの連立方程式 (Ⅳ) が得られる．

$$(\text{Ⅳ})\ \begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, & [3] \\ y = 6. & [5] \end{cases}$$

つぎに $[3] + [5] \times \left(-\dfrac{4}{3}\right)$ をつくり [6] とおけば，つぎの (Ⅴ) が得られる．

$$(\text{Ⅴ})\ \begin{cases} x = 2, & [6] \\ y = 6. & [5] \end{cases}$$

連立方程式 (Ⅴ) の解が (Ⅰ) を満たすことは，(Ⅴ) から (Ⅳ)，(Ⅳ) から (Ⅲ)，(Ⅲ) から (Ⅱ)，(Ⅱ) から (Ⅰ) が得られることから明らかである．

この解法は計算機向きの方法であるが，手計算で行なうときは，つぎのような表の形でかくとよい．

$$\begin{cases} 3x + 4y = 30, \\ 5x + 7y = 52. \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, \\ 5x + 7y = 52. \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, \\ \quad \dfrac{1}{3}y = 2. \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{3}y = 10, \\ \qquad y = 6. \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 6. \end{cases}$$

	x	y	定数項	
Ⅰ	$\boxed{3}$	4	30	[1]
	5	7	52	[2]
Ⅱ	1	$\frac{4}{3}$	10	$[3] = [1] \times \frac{1}{3}$
	5	7	52	[2]
Ⅲ	1	$\frac{4}{3}$	10	[3]
	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	2	$[4] = [2] + [3] \times (-5)$
Ⅳ	1	$\frac{4}{3}$	10	[3]
	0	1	6	$[5] = [4] \times 3$
Ⅴ	1	0	2	$[6] = [3] + [5] \times \left(-\frac{4}{3}\right)$
	0	1	6	[5]

表のような変形は，行列の言葉でいえば，

（1）第 i 行を k 倍する．　$(k \neq 0)$

（2）第 i 行の k 倍を第 j 行にくわえる．　$(i \neq j)$

ということである．

前ページの表による連立方程式の解法は,（1）,（2）のくりかえしによって，未知数の係数からなる行列を単位行列にかえたのである．

なお，(i, i) 成分が 0 の場合には（1）,（2）のほかに，つぎの（3）が必要になる．

（3）第 i 行と第 j 行をいれかえる．　$(i \neq j)$

前ページの表 I の $\boxed{3}$ は，表 II で 1 となるようにし，その 1 を用いて表 III ではおなじ列のほかの成分を 0 とした．表 III の $\boxed{\frac{1}{3}}$ も同様である．

このような計算を，□ で囲んだ成分を“かなめ”とする**掃き出し計算**といい，連立方程式の掃き出し計算による解法を**ガウスの消去法**あるいは**掃き出し法**という．

問 1.　つぎの連立方程式をガウスの消去法によってとけ．

（1）$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x - y = 4. \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 7x - 3y = 23, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 5x + 3y = 50, \\ 9x - 2y = 16. \end{cases}$　（4）$\begin{cases} x - 2y = 10, \\ y + 3z = -18, \\ z - 4x = -21. \end{cases}$

（5）$\begin{cases} x - 4y + 3z = 2, \\ 4x + 5y - 2z = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$

ガウスの消去法による逆行列の計算

たとえば，行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$ を求めるには，

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だからつぎの 2 組の連立方程式

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 5x + 8y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u + 3v = 0, \\ 5u + 8v = 1 \end{cases}$$

をとけばよい．この 2 組の連立方程式では，未知数の係数行列が等しいから，つぎの 1 つの表のなかで，同時に掃き出し計算を行なえばよい．つまり，

1	3	1	0
5	8	0	1

とかいてこれから出発し，以下のように掃き出し計算を行なう．

1	3	1	0	[1]
1	8	0	1	[2]
1	3	1	0	[1]
0	-7	-5	1	$[3] = [2] + [1] \times (-5)$
1	3	1	0	[1]
0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$[4] = [3] \times \left(-\frac{1}{7}\right)$
1	0	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	$[5] = [1] + [4] \times (-3)$
0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	[6]

[5] と [6] で左 2 列が単位行列になった時点で右の 2 列が逆行列となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

が逆行列である．

問 2.　ガウスの消去法によりつぎの行列の逆行列を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.　（2）$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

問題

1.　つぎの各行列に逆行列があれば，それを求めよ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.　（2）$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

（3）$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$.　（4）$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2.　つぎの連立 1 次方程式を逆行列を計算する方法によってとけ．

（1）$\begin{cases} 5x + 10y = 14, \\ 2x - 7y = -1. \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 9x - 2y = 16, \\ 5x + 3y = 50. \end{cases}$

3.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，つぎの行列 X を求めよ．

（1）$AX = B$.　（2）$XA = B$.

4.　（1）行列 $\begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 5 & 3-x \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないように x を定めよ．

（2）行列 $\begin{pmatrix} x+1 & 5 \\ -7 & y-2 \end{pmatrix}$ の逆行列がそれ自身となるように x, y を定めよ．

5.　2 次の正方行列 A，B がどちらも逆行列をもつとき，行列 $B^{-1}A^{-1}$ が行列 AB の逆行列であること，すなわち

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

を証明せよ．また，$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ が，一般には成り立たないことを示せ．

第3章　線形変換

3.1　線形変換とその意味

xy 平面の x 軸に関する対称移動や，原点に関する対称移動など，これらの移動はいわゆる線形変換の特別な場合であり，線形変換は行列と密接な関係をもっている．本章では，このことについて学ぼう．

この章の例では，xy 平面の点全体の集合を V とする．

例 1.　平面の各点を，x 軸に関するその対称点に対応させる V から V への写像は，平面の“ x 軸に関する対称移動 ”である．

点 $P(x, y)$ の x 軸に関する対称点を $Q(x', y')$ とすれば（図 3.1）

$$x' = x,\ \ y' = -y$$

である．この関係は

$$\begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$$

と表わせ，これは行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わされる．

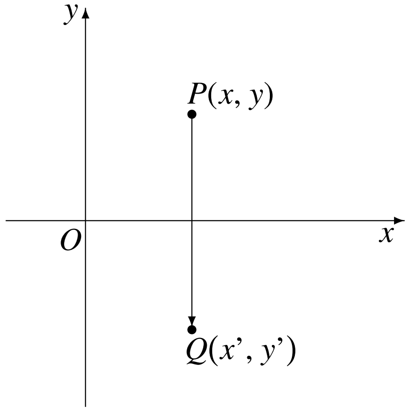


図 3.1．点の対称移動．

例 2.　k を 0 でない定数とするとき，平面上の各点 $P(x,\ y)$ を点 $Q(kx,\ ky)$ に対応させる V から V への写像は，“原点を中心とする相似比 k の相似変換”とよばれる.

この写像による点 $P(x,\ y)$ の像を点 $Q(x',\ y')$ とすれば（図 3.2）

$$x' = kx,\ \ y' = ky,$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という関係がある.

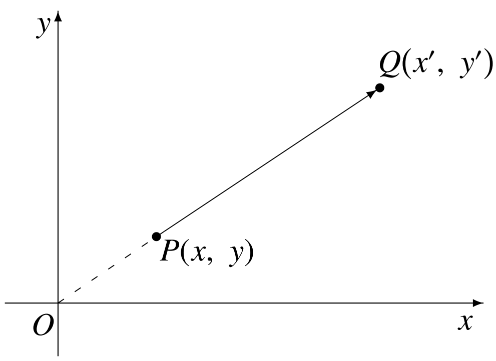


図 3.2.　点の相似変換.

問 1.　つぎの各対称移動による点 $(x,\ y)$ の像を点 $(x',\ y')$ とするとき，x，y と x'，y' の間の関係を，上の例 1，2 にならって表わせ.

（1）　y 軸に関する対称移動.

（2）　原点に関する対称移動.

（3）　直線 $y = x$ に関する対称移動.

例 3.　平面の各点を，その点が原点のまわりに角 θ だけ回転した点に対応させる V から V への写像，すなわち，“原点のまわりの角 θ の回転”を考えよう（図 3.3）.

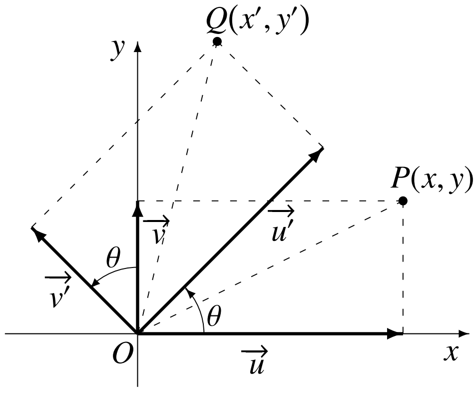


図 3.3．原点まわりの点の回転．

この写像による点，$P(x,\ y)$ の像を点 $Q(x',\ y')$ とすれば，2 つのベクトル

$$\vec{u} = (x\ \ 0),\qquad \vec{v} = (0\ \ y)$$

を原点のまわりに角 θ だけ回転したベクトルは，それぞれ

$$\vec{u'} = (x\cos\theta\ \ x\sin\theta),\qquad \vec{v'} = (-y\sin\theta\ \ y\cos\theta)$$

となり

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{u'} + \vec{v'}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ} = (x\cos\theta - y\sin\theta\ \ x\sin\theta + y\cos\theta).$$

$$\therefore\ \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

すなわち，**回転の行列** $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を使ってかくと，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

回転の行列は簡単に**回転行列**ともいう．

問 2.　原点のまわりの 60° の回転による点 $(x,\ y)$ の像を点 $(x',\ y')$ とするとき，x，y，x'，y' の関係を上の例によって行列で表わせ．

例 1 と例 2・例 3 であつかった写像は，平面上の点 $(x,\ y)$ に点 $(x',\ y')$ を対応させる V から V への写像であり，つぎの形の x，y の 1 次式によってすべて表わされていた．

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} a,\, b,\, c,\, d \\ \text{は定数} \end{array} \right).$$

このように，定数項のない 1 次式で表わされる写像を**線形変換**または **1 次変換**という．上の式の行列を用いて表わせば，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．また

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}$$

とも表わされる．行列 A をこの**線形変換の行列**または **1 次変換の行列**という．逆にこの線形変換のことを，**行列 A で表現される線形変換**，あるいは簡単に**行列 A による線形変換**という．

問 3.　線形変換の行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，この線形変換によるつぎの各点の像を求めよ．

$$(0, 0),\ (1, 0),\ (0, 1),\ (5, -6).$$

線形変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

による

点 $E_1(1, 0)$ の像が点 $P(p_1, p_2)$,

点 $E_2(0, 1)$ の像が点 $Q(q_1, q_2)$

であれば（図 3.4）

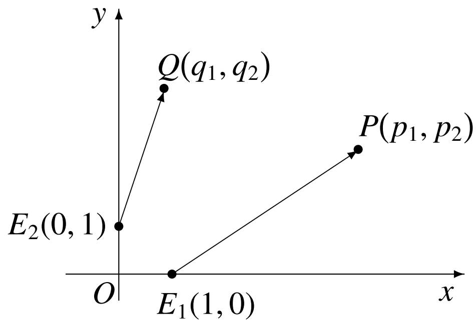


図 3.4. 点の移動.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるから

$$a = p_1, \quad c = p_2, \quad b = q_1, \quad d = q_2.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}.$$

すなわち

定理 3.1.　点 (1, 0) および点 (0, 1) をそれぞれ点 $(p_1,\ p_2)$，点 $(q_1,\ q_2)$ にうつす線形変換の行列は

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}.$$

2 点 $E_1(1,0)$，$E_2(0,1)$ を 2 点 $P(p_1,\ p_2)$，$Q(q_1,\ q_2)$ にうつす線形変換 f によって，点 $U(x,\ y)$ が点 $U'(x',\ y')$ にうつるとすれば，f の行列は $\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わされる．すなわち

$$\begin{cases} x' = xp_1 + yq_1, \\ y' = xp_2 + yq_2 \end{cases}$$

である．

ここで，$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を x 軸方向の**基本ベクトル**，$\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を y 軸方向の**基本ベクトル**とすると，点 U の位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，

$$\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

であり，また

$$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

とおけば，点 U の f による像 U' の位置ベクトル $\boldsymbol{u}'$ は上の x'，y' の式から

$$\boldsymbol{u}' = x\boldsymbol{p} + y\boldsymbol{q}$$

となる．図 3.5 は $x = 3$，$y = 2$ のときの $\boldsymbol{u}$ を示している．また図 3.6 はおなじ x，y に対する $\boldsymbol{u}'$ を示している．

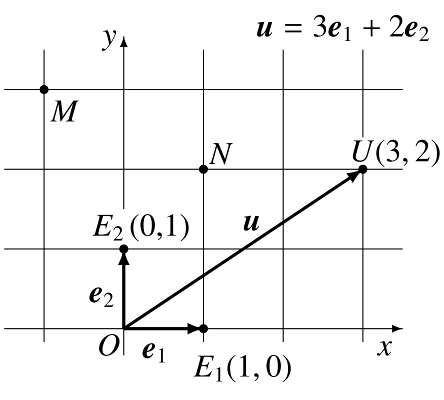


図 3.5．基本ベクトルによる位置ベクトルの表示．

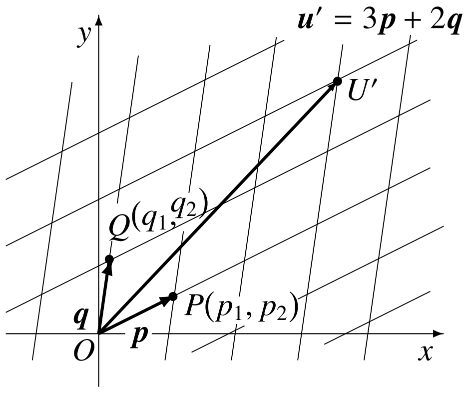


図 3.6．線形変換による点の移動とその位置ベクトル表示．

問 4.　図 3.5 の点 M，N は f によってそれぞれ図 3.6 のどの点にうつされるか．

例題.　線形変換 $x' = x - y$，$y' = 2x + 3y$ によって，直線 $x + y = 1$ はどのような図形にうつされるか.

[解]　点 $P(x,\ y)$ が，この線形変換によって点 $P'(x',\ y')$ にうつされるとすれば，つぎの関係が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，上の関係はつぎのようにかける.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad [1]$$

いま，点 P が直線 $x + y = 1$ の上にあれば，[1] の関係によって

$$\frac{3x' + y'}{5} + \frac{-2x' + y'}{5} = 1.$$

$$\therefore \quad x' + 2y' = 5.$$

よって，直線 $x + y = 1$ は直線 $x + 2y = 5$ にうつされる.

問 5.　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によってつぎの各直線はそれぞれどのような直線にうつされるか.

（1） x 軸.　（2）y 軸.　（3）$2x + y + 1 = 0$.

問 6.　行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換によって，直線 $x+2y+7 = 0$ にうつされる図形を求めよ.

3.2　線形変換の線形性

点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ にうつす線形変換 f は,

$$\text{ベクトル } \overrightarrow{p} = \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \text{ のベクトル } \overrightarrow{p'} = \boldsymbol{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

への対応づけとみなすことができる．この対応づけは，

$$\boldsymbol{p}' = f(\boldsymbol{p}) \quad （あるいは \overrightarrow{p'} = f(\overrightarrow{p})）$$

と表現される．また対応づけであることを強調して写像の表記で

$$f : \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p}'$$

とも表現される．この対応づけにおいて，ベクトル $\boldsymbol{p}'$ は，f のもとでのベクトル $\boldsymbol{p}$ の**像**とよばれる．

問 1.　線形変換 f の行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像はそれぞれ $\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ であることを示せ．

問 2.　線形変換 f のもとでの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の像がそれぞれ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であるとき，f の行列を求めよ．

線形変換 f を 1 つのベクトルからほかのベクトルへの対応づけとみなしたとき，つぎの性質，すなわち線形変換の**線形性**が成り立つ．

線形変換の線形性

定理 3.2.　f を線形変換とする．このとき以下が成り立つ．

(I)　$f(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = f(\boldsymbol{p}_1) + f(\boldsymbol{p}_2)$.

(II)　$f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p})$，ただし，$k$ は定数．

証明.　線形変換 f の行列を A とする．そのとき，

$$f(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = A(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = A\boldsymbol{p}_1 + A\boldsymbol{p}_2 = f(\boldsymbol{p}_1) + f(\boldsymbol{p}_2).$$

$$f(k\boldsymbol{p}) = A(k\boldsymbol{p}) = kA\boldsymbol{p} = kf(\boldsymbol{p}).$$

証明終わり．

問 3.　線形変換 f と定数 k, l に対し，以下の等式が成り立つことを示せ．

$$f(k\boldsymbol{p}_1 + l\boldsymbol{p}_2) = kf(\boldsymbol{p}_1) + lf(\boldsymbol{p}_2).$$

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の線形写像 f のもとでの像をそれぞれ $\boldsymbol{e}'_1$ と $\boldsymbol{e}'_2$ としよう．平面上の任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

としたとき，$\boldsymbol{p}$ の f のもとでの像 $\boldsymbol{p}' = f(\boldsymbol{p})$ は，線形変換の線形性により

$$\boldsymbol{p}' = x\boldsymbol{e}'_1 + y\boldsymbol{e}'_2.$$

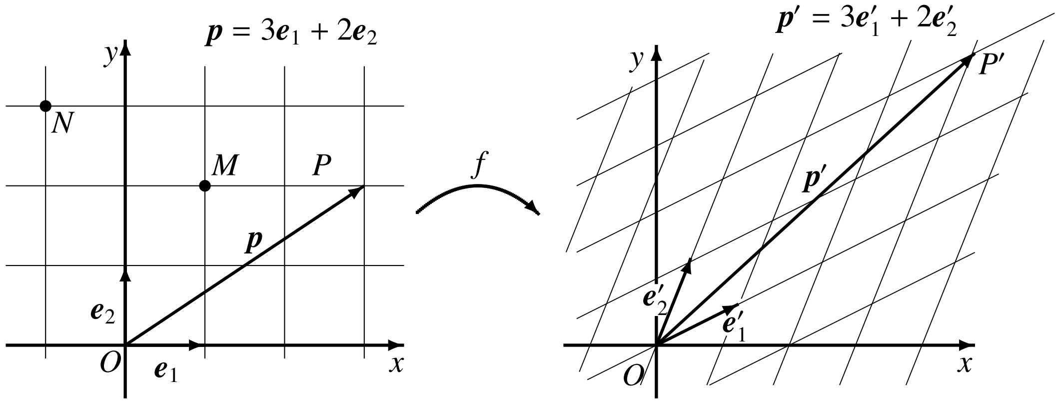


図 3.7．線形変換によるベクトルの像．

図 3.7 は，$\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ が線形変換 f のもとで $\boldsymbol{p}' = 3\boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2$ にうつされる場合を示している．これは，図 3.5 と図 3.6 で示したことの再確認であり，その基本は線形変換の線形性にあることがわかる．つまり，図 3.5 から図 3.6 への変換の議論では，線形変換の行列を具体的に示し，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の f による像ベクトルをその成分で表示して任意の位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{u}'$ にうつるさまを示した．それに対して，図 3.7 の議論では，f の線形性という性質だけから任意の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}'$ にうつるさまを示した．

問 4.　図 3.7 の左の図の 2 つの点 M と N は，それぞれ右の図のどの点にこの線形変換のもとでうつされるか．

例題.　線形変換 f のもとで，2 つのことなる点 A と B がそれぞれことなる点 A' と B' にうつされるとする．このとき，線分 AB の中点 M は線分 $A'B'$ の中点にうつされることを証明せよ．

証明.　点 A，B，M の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{m}$ とする．そのとき，点 A'，B'，M' の位置ベクトルはそれぞれ $f(\boldsymbol{a})$，$f(\boldsymbol{b})$，$f(\boldsymbol{m})$ となる．点 M は，線分 AB の中点なので，$\boldsymbol{m} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ である．線形変換 f の線形性より，

$$f(\boldsymbol{m}) = f\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{2} = \frac{f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})}{2}$$

となる．ゆえに M' は線分 $A'B'$ の中点である（図 3.8）．
証明終わり．

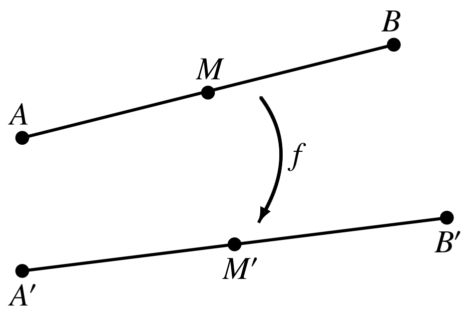


図 3.8.　線形変換による中点の移動.

問 5.　上の例題とおなじ仮定のもとで，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P としたとき，P の像 P' は線分 $A'B'$ を $m:n$ に内分することを示せ．

3.3　線形変換による図形の移動

線形変換 f の行列を A とし，任意の点 $(x,\ y)$ の f のもとでの像を点 $(x',\ y')$ とする．すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば，（3.1）の両辺に左から A^{-1} をかけて，両辺をいれかえると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

となる．等式（3.1）と（3.2）は等価である．それゆえ，平面上のどの点 $(x,\ y)$ もただ 1 つの点 $(x',\ y')$ の像である．

この事実を一般化するとつぎの定理を得る．

定理 3.3.　線形変換 f の行列が逆行列をもてば，f のもとで，平面全体が平面全体にうつされ，ことなる 2 点はことなる 2 点にうつされる．

問 1.　線形変換の行列が $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ である線形変換のもとで点 $(7, 5)$ へうつされる点をみつけよ．

次章「行列式」で詳しく述べるが，線形変換 f の行列が逆行列をもたない場合は，その行列が零（ゼロ）行列でなければ，f のもとで平面全体は原点をとおる 1 本の直線上にうつされる．

例 1.　線形変換 f の行列を $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする．この行列には逆行列が存在しない．この f のもとで点 $(x,\ y)$ は，点 $(x',\ y')$ にうつされるとすると

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$$

である．それゆえ，$y' = 2x'$ が成り立つ．このことから，f のもとで，平面全体は直線 $y = 2x$ にうつされることがわかる（図 3.9）．

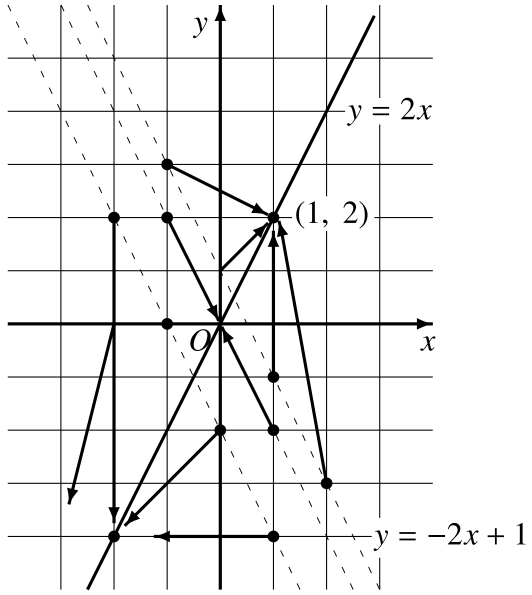


図 3.9.　線形変換の行列が，零（ゼロ）行列ではなくかつ逆行列をもたない場合．平面上の任意の点はある直線にうつされる．

問 2.　上の例の線形変換のもとでうつされる像が，直線 $y = 2x$ 上の点 $(1, 2)$ となる点のあつまりは，直線 $2x + y = 1$ 上の点全体の集合であることを示せ．

今度は線形変換による直線のうつり先を考えよう．以下の定理が成り立つ．

線形変換による直線の像

定理 3.4.　線形変換 f のもとで，2 つのことなる点 A と B がそれぞれことなる 2 つの点 A' と B' にうつされるなら，f のもとで直線 AB は直線 $A'B'$ にうつされる．

証明.　点 A，B，A'，B' の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{b}'$ とする．そのとき，

$$\boldsymbol{a}' = f(\boldsymbol{a}),\ \ \boldsymbol{b}' = f(\boldsymbol{b})$$

である．直線 AB にそって動く点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると，パラメータ t を使って直線 AB は

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

と表わされる．P の像 P' の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}'$ とすると，

$$\boldsymbol{p}' = f(\boldsymbol{p})$$

である．線形変換 f の線形性より，

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{a}' + t(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{a}')$$

が成り立つ．これは，位置ベクトルが $\boldsymbol{p}'$ である点 P' の集合は直線 $A'B'$ であることを示している（図 3.10）．
証明終わり．

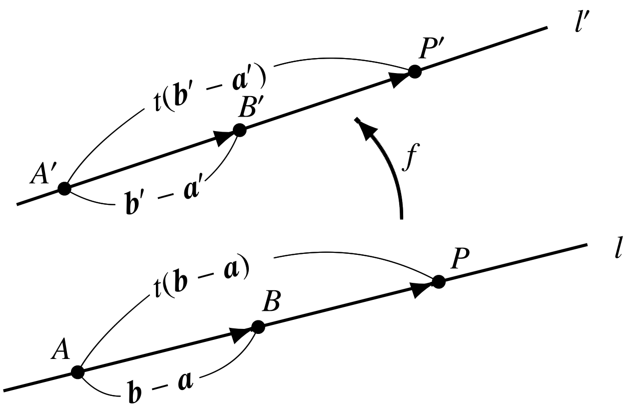


図 3.10.　線形変換 f のもとで, 1 つの直線 l 上の 2 点がほかの直線 l' 上の 2 点にうつされるなら l 上の任意の点は f のもとで l' 上の点にうつされる．

問 3.　線形変換 f のもとで 2 つのことなる点 A と B がそれぞれことなる点 A' と B' にうつされるならば，線分 AB はどんな図形にうつされるか．

線形変換のもとで，2 つのことなる点 A と B が同一の点 A' にうつされるならば直線 AB 上のすべての点は A' にうつされる．

問 4.　上の主張を証明せよ．

例題 1.　直線 l を $x + 3y - 3 = 0$ とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，直線 l はどのような図形にうつされるか．

[解]　直線 l 上の 2 点 $(0, 1)$ と $(3, 0)$ の像を考える．それらは，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに，直線 l は 2 つの点 $(-1, 4)$ と $(3, 6)$ をとおる直線 $x - 2y + 9 = 0$ にうつされる（図 3.11）．

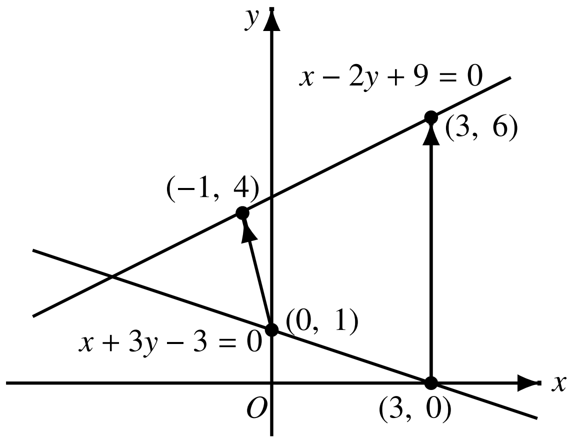


図 3.11.　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，直線 $x + 3y - 3 = 0$ は直線 $x - 2y + 9 = 0$ にうつされる．

[別解]　問題文中の行列で表現される線形変換のもとで点 (x, y) は点 (x', y') にうつされると仮定せよ．すなわち，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

式（3.3）の両辺に左から $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけて，さらに x と y についてとくと

$$x = \frac{4x' + y'}{6}, \qquad y = \frac{2x' + y'}{6} \tag{3.4}$$

を得る．式（3.4）を直線の式 $x + 3y - 3 = 0$ に代入して，

$$\frac{4x' + y'}{6} + 3 \cdot \frac{2x' + y'}{6} - 3 = 0.$$

すなわち，

$$x' - 2y' + 9 = 0.$$

よって，直線 $x + 3y - 3 = 0$ は

$$x - 2y + 9 = 0$$

にうつされる．

問 5.　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，つぎの直線はどのような図形にうつされるか．

（1）$y = 2x + 1$.　（2）$2x + y + 1 = 0$.　（3）x 軸.

問 6.　行列 $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ で表現される線形変換のもとで，つぎの直線はどのような図形にうつされるか．

（1）$y = 3x + 2$.　（2）y 軸.　（3）$2x - y + 1 = 0$.

例題 2.　線形変換 f の行列を $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，

（1）　変換 f のもとで動かない点をみつけよ．

（2）　変換 f のもとでそれ自身にうつる直線をみつけよ．

[解]

（1）　変換 f のもとで動かない点を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = 3x - 5y,$$
$$y = 2x - 4y$$

である．これらから，$y = \frac{2}{5}x$ が得られる. ゆえに，変換 f のもとで動かない点全体は，直線 $y = \frac{2}{5}x$ 上のすべての点のあつまりである．

（2）　変換 f のもとでそれ自身にうつる直線 l を $y = mx + n$ とする．直線 l 上の 2 点 $(0,\ n)$ と $(1,\ m+n)$ は，変換 f のもとでそれらは

$$(-5n,\ -4n),\ (3 - 5m - 5n,\ 2 - 4m - 4n) \tag{3.5}$$

にうつる．直線 l は f のもとで自分自身にうつるので,（3.5）の 2 点はともに l 上にある．すなわち，

$$-4n = m(-5n) + n, \tag{3.6}$$

$$2 - 4m - 4n = m(3 - 5m - 5n) + n. \tag{3.7}$$

式（3.7）から（3.6）をひくと

$$2 - 4m = m(3 - 5m) \tag{3.8}$$

となり，これをといて

$$m = 1 \quad \text{あるいは} \quad m = \frac{2}{5}$$

を得る．$m = 1$ に対しては,（3.6）から n は任意の定数となる．また，$m = \frac{2}{5}$ に対しては，やはり（3.6）から $n = 0$ となる．ゆえに，求める直線は，n を任意の定数として，

$$y = x + n \quad \text{あるいは} \quad y = \frac{2}{5}x$$

となる．

問 7.　例題 2 の線形変換 f のもとで，直線 $x = c$，ただし c は定数，はどのような直線にうつされるか.

問 8.　以下で表現される線形変換のもとで，不動（動かない）である点を示せ．また，自分自身を自分自身にうつす直線はあるか．ある場合はそれらを示せ．

$$\text{(1)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2)}\ \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(3)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例題 3.　双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を原点まわりに 45° 回転させた曲線の方程式を示せ．

[解]　点 $P(x,\ y)$ を原点まわりに 45° 回転させた点を $P'(x',\ y')$ とすると，第 3.1 節の例 3 より，

$$\begin{cases} x' = x\cos\dfrac{\pi}{4} - y\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \\[2ex] y' = x\sin\dfrac{\pi}{4} + y\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$$

である．この 2 つの式を $x,\ y$ に関する連立方程式とみたてて $x,\ y$ についてとくと，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$$

を得る．よって，点 $P(x,\ y)$ が双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ 上にあるという条件を x' と y' によって表わすと，

$$\frac{1}{2}(x'+y')^2 - \frac{1}{2}(-x'+y')^2 = 2$$

となる．これを簡単化すると $x'y' = 1$，すなわち，

$$xy = 1$$

となり，これが求める曲線の方程式である．

3.4　線形変換の合成と逆変換

線形変換の合成

2 つの線形変換 f および g の行列を，それぞれ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

とする．

点 $P(x,\ y)$ が f によって点 $Q(x',\ y')$ にうつり，点 Q が g によって点 $R(x'',\ y'')$ にうつるとすれば（図 3.12）

$$\begin{tikzcd} P(x,\ y) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Q(x',\ y') \arrow[r, "g"] & R(x'',\ y'') \end{tikzcd}$$

図 3.12．線形変換の合成．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表わされるから，f と g の合成写像 $g \circ f$ も線形変換である．これを f と g の**合成変換**という．

定理 3.5.　線形変換 f，g の行列をそれぞれ A，B とすると，f と g の合成変換 $g \circ f$ の行列は，B と A の積 BA である．

問 1.　線形変換 f，g の行列が，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるとき，合成変換 $g \circ f$ および $f \circ g$ の行列を求めよ．

問 2.　$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x + 4y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 3x' + y', \\ y'' = 4x' - y' \end{cases}$

であるとき，x''，y'' を x，y によって表わせ．

例 1.　原点のまわりの角 α の回転を表わす線形変換に，原点のまわりの角 β の回転を表わす線形変換を合成すると，回転の意味から，これは，原点のまわりの角 $(\alpha + \beta)$ の回転を表わす線形変換になる（図 3.13）．

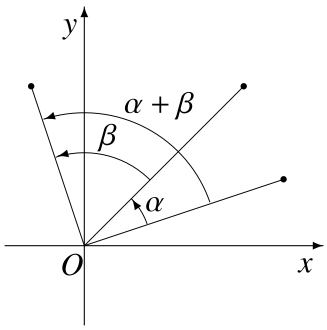


図 3.13.　直積した原点まわりの回転．

したがって，回転の行列の間につぎの関係が恒等的に成り立つ．

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

左辺の積を計算し，両辺の第 1 列を比較することによってつぎの公式が得られる．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

上の式で，β のかわりに $-\beta$ とおくことにより，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の公式が得られる．すなわち

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}\qquad\text{（復号同順）}$$

上の式が成り立つことを，それぞれ**正弦の加法定理**，**余弦の加法定理**という．

線形変換の逆変換

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

とおいて

$$\boldsymbol{u}'=A\boldsymbol{u} \tag{3.9}$$

と表わされる線形変換を f とし，f の行列 A が逆行列 A^{-1} をもつ場合を考える．$A^{-1}A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ であるから（3.9）の両辺に左から A^{-1} をかければ

$$\boldsymbol{u}=A^{-1}\boldsymbol{u}'$$

が得られる．

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$$

とおけば，f の逆写像は

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

と表わされやはり線形変換である．これを f の**逆変換**という．

定理 3.6.　線形変換 f の行列が A で，A の逆行列 A^{-1} が存在すれば，f の逆写像も線形変換で，その行列は A^{-1} である．

問 3.　つぎの式を表わす線形変換について，逆変換の式を求めよ．

（1）$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

問 4.　（1）原点を中心とする相似比 k の相似変換の行列を求めよ．

（2）（1）の行列の逆行列を求めよ．

（3）（1）の線形変換の逆変換はどのような相似変換を表わすか．

問 5.　原点を中心とする角 θ の回転と角 $-\theta$ の回転の行列をそれぞれ求め，その一方が他方の逆行列となっていることをたしかめよ．

問題

1.　点 $(x,\ y)$ をつぎの各点にうつす写像は線形変換か．また，線形変換であればその行列を求めよ．

（1）$(0,\ x)$.　（2）$(x,\ -1)$.　（3）$(y,\ -2x)$.

（4）$(x-y,\ x+2y)$.　（5）$\left(\dfrac{x+3}{2},\ \dfrac{y-2}{2}\right)$.　（6）$(x,\ 2-y)$.

2.　つぎの線形変換の行列は，どのような図形的操作に対応するかをいえ．

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.　（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.　（3）$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3.　つぎの行列の表わす線形変換によって，4 点

$$(0,\ 0),\quad (1,\ 0),\quad (1,\ 1),\quad (0,\ 1)$$

を頂点とする正方形の周および内部の点は，どのような図形にうつされるか．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.　平面上の点 P をつぎのような点 P' にうつす線形変換の行列を求めよ．

（1）　点 P' は，点 P の x 軸上への正射影.

（2）　点 P' は，点 P をとおる傾き 2 の直線と直線 $y = x$ との交点.

5.　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ であって，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{8}{17}$ のとき，次の値を求めよ.

（1）$\sin(\alpha + \beta)$.　　（2）$\cos(\alpha - \beta)$.

6.　（1）原点のまわりの $30°$ の回転を表わす行列を求めよ.

（2）直線 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ を，原点のまわりに $30°$ だけ回転して得られる直線の方程式を求めよ.

第4章　行列式

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列が存在するための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり，逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であたえられた．

定義．　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$ad - bc$ を A の**行列式**とよぶ．行列式は，

$$\det(A), \qquad |A|, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などとかく．

問 1.　以下の行列の行列式を計算せよ．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.　（3）$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

問 2.　回転行列 $R(\theta)$ の行列式は 1 であることを示せ．

これまでは，**行ベクトル** $(a \;\; b)$ と，**列ベクトル** $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の区別を行なってこなかったが，以降で単にベクトルといえば列ベクトルのこととする．また零（ゼロ）ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{0}$ で表現する．

4.1　行列式の意味

行列式の幾何的な意味を考えよう．ここでは数はすべて実数とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ をならべてできる行列 $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が定める平面の 1 次変換を $f : \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ とする．第 3.1 節で示したように，$\boldsymbol{v}_1 = A\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{v}_2 = A\boldsymbol{e}_2$ である．ただし，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

いま，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を 2 辺とする単位正方形の周と内部からなる U を考えると，その面積は 1 である．この正方形 U の f によるうつり先（像）とその面積を求めよう．U の f による像を $f(U)$ とかく．集合の記号を用いれば

$$f(U) = \left\{ f(\boldsymbol{v}) \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in U \right\} = \left\{ A\boldsymbol{v} \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in U \right\}$$

である．

$\boldsymbol{d}$ を方向ベクトルとし，t を実数としたとき，行列 A で表現される線形変換による，直線 $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{d}$ の像は $A\boldsymbol{v} + tA\boldsymbol{d}$ となる．これは $A\boldsymbol{d}$ が零（ゼロ）ベクトル $\mathbf{0}$ でないかぎり直線を表わす．この線形変換により，$\boldsymbol{v}$ がちがうだけの平行な 2 直線 $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{v}' + t\boldsymbol{d}$ は，それぞれ $A\boldsymbol{v} + tA\boldsymbol{d}$，$A\boldsymbol{v}' + tA\boldsymbol{d}$ という平行な 2 直線にうつされる．

単位正方形 U についても，辺の方向ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の像 $A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1$ と $A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2$ が一直線上になければ，U の 2 組の対辺は 2 組の平行な線分にうつる．したがってこのとき，$f(U)$ は平行四辺形の周と内部となる（図 4.1）．

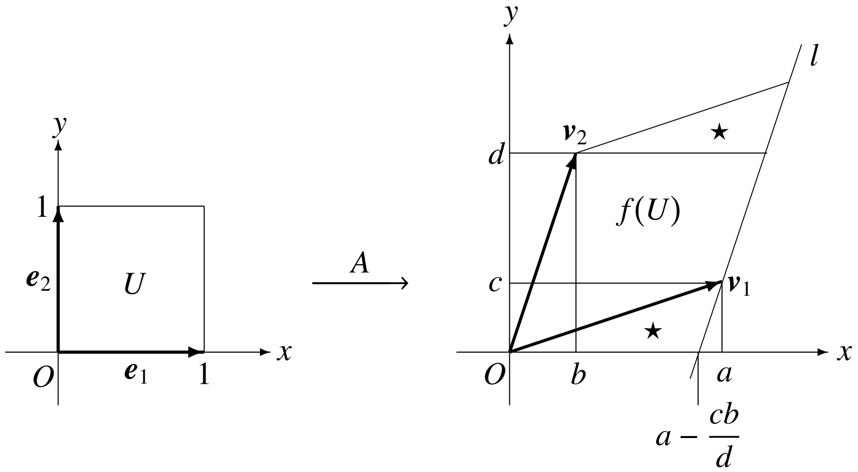


図 4.1.　$A = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2)$ で表現される線形変換による図形の像．

$f(U)$ の面積を求めよう．$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ はとりあえず図 4.1 のような位置関係であるとする．そして，$\boldsymbol{v}_2$ の y 成分の絶対値を高さにもち，x 軸を底辺とするように面積がかわらないように変形して,「底辺×高さ」で面積を求める．それには，図の上の ★ の三角形を下の ★ の合同な三角形にもってくればよい．

変形後の底辺の長さは，$\boldsymbol{v}_2$ の対辺を延長した直線 l が x 軸と交わる座標の絶対値である．直線 l は,「原点をとおり方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_2$ の直線を $\boldsymbol{v}_1$ だけ平行移動したもの」だから，その上の任意の点 $Q(x, y)$ は，ベクトルを用い

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a + tb \\ c + td \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は実数})$$

と表わされる．したがって l が x 軸と交わるとき y 座標は 0 であるから $c + td = 0$ となり，$d \neq 0$ なら $t = -\dfrac{c}{d}$ となる．これを x 座標 $a + tb$ に代入して $a - \dfrac{c}{d}b$ となる．また，$(\text{高さ}) = \left|(\boldsymbol{v}_2 \text{の } y \text{ 成分})\right| = |d|$ (d の絶対値) だから

$$f(U) \text{ の面積} = \left|\left(a - \frac{c}{d}b\right) \cdot d\right| = |ad - bc|$$

であることがわかる．$d = 0$ のときも，$f(U)$ の面積は底辺 $|b|$ で，高さ $|c|$ の平行四辺形の面積として $|bc|$ であるからつぎが成り立つ．

定理 4.1.　基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を 2 辺とする単位正方形の周と内部を U とする．線形写像 f とその行列を A とすると，

$$f(U) \text{ の面積} = \left|\det(A)\right| \quad (\text{行列式の絶対値}).$$

すなわち，行列 A で表わされる線形変換 f は，単位正方形を，$\left|\det(A)\right|$ だけの面積をもつ平行四辺形にうつし，したがって種々の図形の面積もやはり $\left|\det(A)\right|$ 倍にする．

問 1.　以下の行列で表現される線形変換によって単位正方形がうつされる平行四辺形の面積を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

問 2.　回転の行列 $R(\theta)$ で表現される線形変換により単位正方形がうつされる図形の面積を求めよ．

つぎに行列式の符号について考えよう．$\boldsymbol{v}_1$ の方向を基準に，$\boldsymbol{v}_2$ は θ 回転した方向としよう．ただし，$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$ とする．回転行列を使って $\boldsymbol{v}_2 = k\,R(\theta)\,\boldsymbol{v}_1$，ただし k は正の定数，とかける．$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ として

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{vmatrix} \\
&= \left|\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ kR(\theta)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right| \\
&= \begin{vmatrix} a & k(a\cos\theta - c\sin\theta) \\ c & k(a\sin\theta + c\cos\theta) \end{vmatrix} \\
&= k(a^2 + c^2)\sin\theta\ (= \left|\boldsymbol{v}_1\right|\left|\boldsymbol{v}_2\right|\sin\theta)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

となる．$\sin\theta$ の正負は $\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{v}_1$ の左側か右側できまり（図 4.2），これが行列式の符号をきめる．

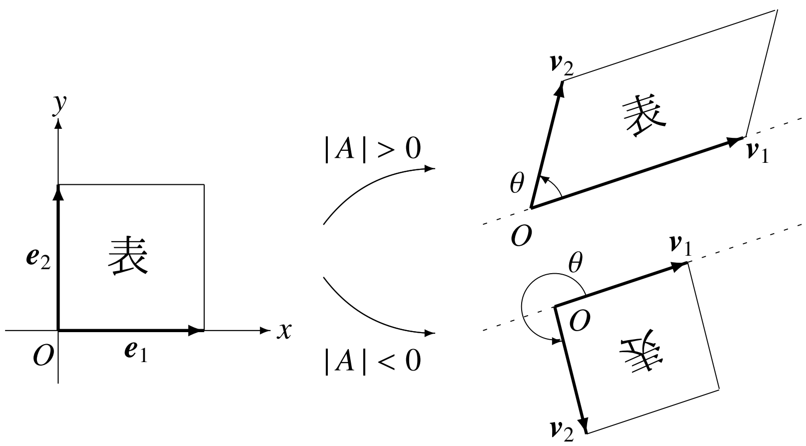


図 4.2．行列式 $\left|A\right| = \left|\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\right|$ の符号と向き．

例 1.　回転行列 $R(\theta)$ の行列式は 1 である．（回転は面積をかえず，裏返しもしない．）

例 2.　平面の「ずらし」（図 4.3）を表わす $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$（$t$ は実数）についても行列式は 1 である．

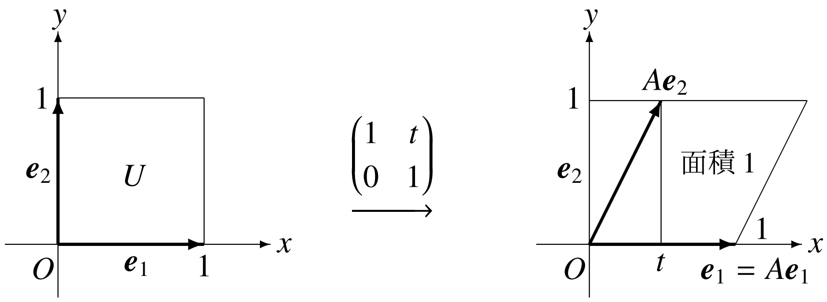


図 4.3.　平面のずらし．

A は $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ にうつすので，$\det(A)$ の正負は A による変換で平面が裏返るか（すなわち向きをかえるか）どうかを表わしている．

例 3.　対角行列* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ は，a，b は実数，なら座標平面を横に a 倍，縦に b 倍する線形変換を定める．対角成分の a と b がともに 0 でなければ行列式は ab である．$ab < 0$ なら平面を裏返すが，$a < 0$，$b < 0$ なら $ab > 0$ であり，（ともに -1 のときを考えるとわかるように）（-1 倍）（＝ 180° 回転）と拡大の合成であり向きをかえない．

問 3.　以下の行列で表現される線形変換で平面が裏返るか．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

問 4.　回転の行列 $R(\theta)$ で表現される線形変換で平面は裏返らない．これを示せ．

*行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ において $a_2 = a_3 = 0$ である行列 $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$ を**対角行列**といい，a_1 と a_4 をその行列の**対角成分**という．

4.2　行列式の性質

行列式の重要な性質としてつぎの**乗法性**がある．

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{4.2}$$

ここで A，B は任意の 2 次正方行列である．この公式は，行列の積と行列式の定義から直接たしかめることができる．

行列式の絶対値は面積比という定理によれば，乗法性は「線形変換による面積比が A で k 倍，B で h 倍なら，積 AB では kh 倍」ということを意味する．符号についても，(4.2）によれば「積の行列式の符号がそれぞれの行列式の符号の積」だが，これも「紙を二度裏返すともとどおり」ということである．

さらに（4.2）で $B = A^{-1}$ のときを考えれば，$\det(AB) = \det I = 1$ なので

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1. \qquad \therefore\ \det(A^{-1}) = \Big(\det(A)\Big)^{-1} \tag{4.3}$$

が成立する．すなわち $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$ である．

例.　k 倍を表わすスカラー行列 kI について，行列式は k^2 である．逆行列は $k \neq 0$ なら存在し，その行列式は $\left|k^{-1}I\right| = k^{-2}$ である．

等式（4.2）と（4.3）は 2 次正方行列にかぎらず，3 次，4 次，... といった一般の正方行列でも成立し，さまざまな場合で用いられる．その重要性に鑑みて定理としてまとめておこう．

定理 4.2.　A，B を正方行列とする．このとき以下が成り立つ．

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$，すなわち $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$.
2. $\det(A^{-1}) = \Big(\det(A)\Big)^{-1}$，すなわち $\left|A^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1}$.

問 1.　A，B を 2 次正方行列とする．乗法性 $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$ を示せ．

問 2.　以下の行列について $\left|AB\right| = \left|A\right|\left|B\right|$ が成り立つことを行列式を計算することにより示せ．

（1）$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, 　$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

（2）$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 　$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

問 3.　以下の行列について，$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ が成り立つことを逆行列と行列式を計算することにより示せ.

（1）$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.　（2）$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4.3　行列式が 0 のとき

行列式が 0 のとき逆行列はない．行列式が 0 でないとき，行列 A の逆行列は，連立方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{v}$ をあたえる．すなわち $\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w}$ である．解 $\boldsymbol{v}$ が各 $\boldsymbol{w}$ について 1 つに定まるためには，ことなる点 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}'$ が，ことなる点 $\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{w}'$ にうつる必要がある．おなじ $\boldsymbol{w}$ にうつると，$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ からきたとも $\boldsymbol{v}'$ からきたともいえて，解 $\boldsymbol{v}$ が 1 つにきまらないからである．

したがって行列式＝面積比が 0 だと，平面がつぶれて逆行列が存在しなくなる．すなわち,（1）まず行列 $A = O$ のとき A は平面全体を原点にうつす．そのため逆写像がつくれない.（2）$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq O$ で行列式が 0 のときは，$ad = bc$ より，たとえば $a \neq 0$ のとき，$b = ka$ とすると $d = kc$ で，$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}$ となる．すると $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ はすべての k に対して $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ と 1 点にうつされる．そのため，点 $\boldsymbol{v}$ をとおる直線 $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{u}$（$t$ は実数）は A により，$A(\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{v} + tA\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v}$ と 1 点 $A\boldsymbol{v}$ につぶれる．そのため逆写像はつくれない．また，$\boldsymbol{v}$ が平面全体を動いても，$A\boldsymbol{v}$ の全体は方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ の原点をとおる直線にしかならない（図 4.4）．なぜなら $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ とすると $A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a & ka \\ c & ka \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_x + kau_y \\ cu_x + kcu_y \end{pmatrix} = (u_x + ku_y)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ となるからである．この直線の上の点 $\boldsymbol{w}$ に対してのみ $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{u}$ の t の分だけ無数にある．

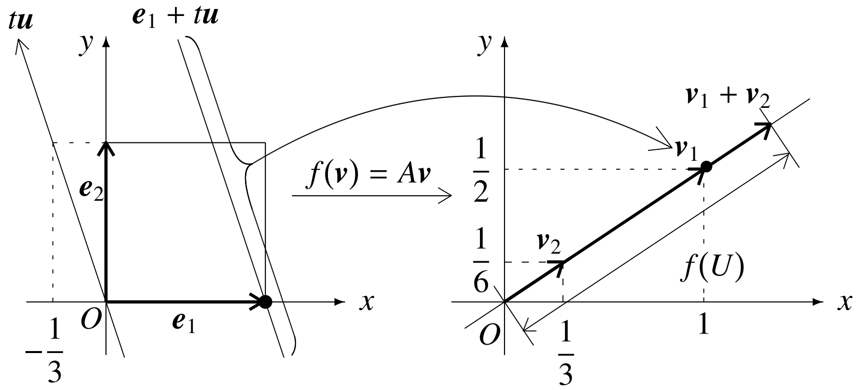


図 4.4.　$\det A = 0$ のとき．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，の場合を例示する．この図は，本文中での $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{e}_1$ であるときを示す.

以上の考察をふまえて，行列式が 0 となる必要十分条件をあたえる重要な定理を述べよう．この定理は以降の議論でしばしば使われる.

定理 4.3.　2 次行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ の行列式が 0 となるのは，ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ で $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがあるときかつそのときにかぎる.

証明.　上の議論で，行列式が 0 ならば $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ で $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を満たすものがあるとはわかっている．逆は，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ としていいかえれば,「すくなくとも一方は 0 でない数 k，l があって，$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}_1 + l\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ である」という仮定のもとで，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ の行列式が 0 となることを示すことである．この仮定のもとでは，$l \neq 0$ または $k \neq 0$ であり，$l \neq 0$ なら $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & -\frac{k}{l}\boldsymbol{v}_1 \end{pmatrix}$ とかけて，この行列式は 0 となる．$k \neq 0$ のときも同様である.
証明終わり.

問 1.　2 次行列 A についてつぎの同値を示せ.

$$|A| \neq 0 \iff A \text{ 倍写像 } (f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}) \text{ が単射} \iff A \text{ 倍写像が全射}.$$

問題

1.　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ とする．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を 2 辺とする単位正方形を U とする．A による U の像 $A(U)=\{A\boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{u}\in U\}$ をそれぞれ図示し，その面積を求めよ．

2.　$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{pmatrix}$ について 1 とおなじことをせよ．

3.（1）2 次行列 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}$ の行列式を $\begin{vmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{vmatrix}$ とかくとき，つぎを示せ．

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{w} & \boldsymbol{v}\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{vmatrix}+k'\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\end{vmatrix}.$$

（2）　成分がすべて実数のとき，上の 2 つの式の図形的意味を考えよ．

4.（1）つぎのような行列 A を求めよ．

（i）　A は $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ にうつす.

（ii）　A は $\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ にうつす.

（2）（1）のそれぞれの A について，単位正方形の像の面積と行列式とを求めよ．

5.　つぎのような線形変換を表わす行列 A を（あればすべて）求めよ．

（1）　A は $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ を，それぞれ $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ にうつす.

（2）　実数 k を固定する．A は $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}k\\ v-k\end{pmatrix}$ をそれぞれ基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ にうつす.

（3）　A による線形写像で，直線 l : $y=2x+1$ が l 自身にうつる．

第5章　固有値と固有ベクトル

5.1　座標変換

これまでは，平面上の点全体の集合を V とかいてきた．この章では，実数のあつまりである数直線を $\boldsymbol{R}$ で表わし，平面上の点全体の集合を $\boldsymbol{R}^2$ とかくことにする．ただし，この表記のもとでは，$\boldsymbol{R}$ は，たし算とかけ算が定義された実数全体の集合を表わし，$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ は，2 つの実数の組 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ を 2 次元ベクトルとみて，ベクトルどうしのたし算と，実数とベクトルのかけ算が定義された集合 $\left\{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mid x\ \ y \in \boldsymbol{R} \right\}$ を表わす．

$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ をそれぞれ 2 次元のベクトルとする．このとき $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ をならべてできる 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix}$ が 0 でないとしよう．$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は平行四辺形を定め，これをしきつめて平面 $\boldsymbol{R}^2$ にひとつの座標系が定まる（図 5.1）．点の位置を特定するための数の組が座標であるが，原点 O を固定した上で，一般の点 P の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{OP} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \tag{5.1}$$

と表わす係数の組 $(s,\ t)$ を P の新しい座標と考えるわけである．これを $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で定まる点 P の**座標**とよぼう．

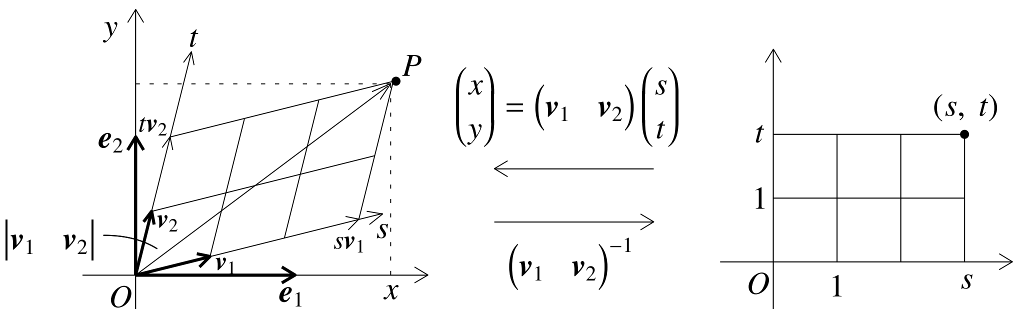


図 5.1.　ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ が定める座標系と，その座標系での点 P の新しい座標．

（5.1）の形の和を，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の**線形結合**または**1 次結合**とよぶ．また，座標系を定める資格のあるベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を**基底**とよぶ．すなわち

定義.　2 つの 2 成分実ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{R}^2$ の基底をなすとは，すべてのベクトルが $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ の線形結合（5.1）で 1 とおりにかけることをいう．

基底のこの定義は，s，t を実数としたとき，

$$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \text{なら} \quad s = t = 0 \tag{5.2}$$

が成り立つことと同値である．なぜなら，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が基底のとき，もし $s \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_1 = -\left(\dfrac{t}{s}\right)\boldsymbol{v}_2$ となり $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が平行，あるいは零（ゼロ）ベクトルとなり，$\boldsymbol{v}_1$ と平行なベクトルか零ベクトルしか表現できず，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ が基底であることに矛盾する．$t \neq 0$ のときも同様である．逆に,（5.2）が成り立つとする．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = s_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 = s_1'\boldsymbol{v}_1 + t'\boldsymbol{v}_2$ と 2 とおりにかけたとすると，$(s_1 - s_1')\boldsymbol{v}_1 + (t_1 - t_2')\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ となるので（5.2）より $s_1 = s_1'$，$t_1 = t_2'$ となり，結局 $\boldsymbol{v}$ は 1 とおりにかけている．

また $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix} = 0$ なるときは $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が平行なので $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は基底ではない．逆に，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ としよう．このとき第 4.3 節定理 4.3 において，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とすれば（5.2）が成り立つことがわかる．よって，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が基底をなすことは $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ と同値である．まとめると，

定理 5.1.　$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を 2 成分実ベクトルとする．

1. $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{R}^2$ の基底であるのは，s，t を実数としたとき，$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ なら $s = t = 0$ が成り立つときかつそのときにかぎる．
2. $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{R}^2$ の基底であるのは，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ となるときかつそのときにかぎる．

注.　$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ の線形結合で任意のベクトルを表わすとき，表わしかたが 1 とおりでないと，点の座標が 1 とおりでなくなるという問題が生じる．つまり「$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = s'\boldsymbol{v}_1 + t'\boldsymbol{v}_2$　ならば　$s = s'$，　$t = t'$」が成り立つとはいえなくなる．この条件を移項して「$(s - s')\boldsymbol{v}_1 + (t - t')\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$

ならば $s = s'$，$t = t'$」としたのが（5.2）である．

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ はもちろん $\boldsymbol{R}^2$ の基底である．さて，$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ が，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を基底とする座標系では（5.1）で表わされるとしよう．（5.1）の右辺をつぎのようにかきかえる（図 5.1）．

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

これに $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ の逆行列をかければ

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

を得る．（5.4）が新しい座標をあたえる**座標変換の公式**である．

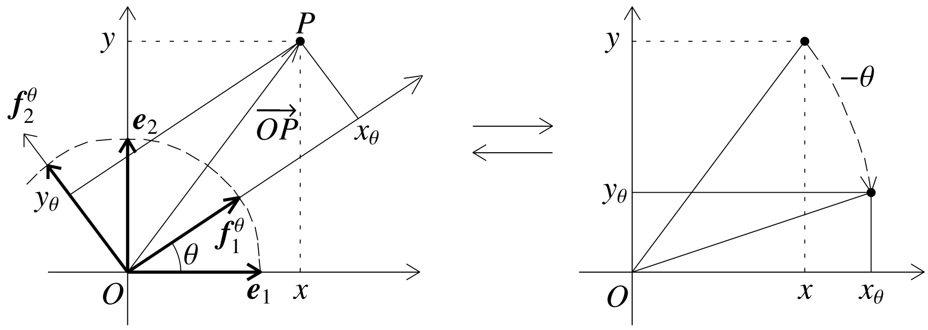


図 5.2.　$\begin{pmatrix} f_1^\theta & f_2^\theta \end{pmatrix} = R(\theta)$ で定まる座標系．新しい座標 x_θ，y_θ は，もとの座標 x，y から $R(\theta)^{-1}$ 倍（逆回転）で得られる．

例 1.　基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を角 θ だけ回転して得られるベクトルを $\boldsymbol{f}_1^\theta$，$\boldsymbol{f}_2^\theta$ とし，これらを使って新しい座標を定める．$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ である点 P の新しい座標を x_θ，y_θ とかくことにすれば，

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1^\theta & \boldsymbol{f}_2^\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix}$$

である（(5.3) 式）．$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1^\theta & \boldsymbol{f}_2^\theta \end{pmatrix}$ は回転行列だから，その逆行列は逆回転であたえられ，

$$\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

つまり，点をとめて座標系を回転するとき，新しい座標は逆回転で得られる（図 5.2）．点は動かさず座標軸を θ だけ回転させることは，座標軸はそのままで $-\theta$ だけ点を回転（逆回転）させたことと，移動後の座標成分でみればおなじことになる．この関係を一般に表わすのが（5.4）である．

問 1.　つぎのベクトルの組は $\boldsymbol{R}^2$ の基底か．

（1）$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$.

問 2.　基底 $\boldsymbol{f}_1^{(\frac{\pi}{3})}$，$\boldsymbol{f}_2^{(\frac{\pi}{3})}$ に関するつぎの点の座標を求めよ．

（1）$P(1,\ 0)$.　　（2）$Q(-1,\ 1)$.

注.　第 3 章では線形変換としての**点の回転**を考えた．それに対しここの例 1 では，点は動かさずに**座標軸の回転**を考えている．もとの点の座標 $(x,\ y)$ を回転後の点の座標 $(x',\ y')$ に変換する点の回転行列は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ であるのに対し，座標軸の回転による新しい座標を，もとの座標軸での座標に結びつける行列は $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ となる．点の回転の場合，回転前後ともおなじ座標軸での座標成分であるのに対し，座標軸の回転では，前後の座標が，ことなる座標軸での同一の点の座標成分であることに注意してほしい（図 3.3 と図 5.2 の左図参照）．

5.2　直線に関する折り返し

原点をとおる直線についての折り返しを表わす行列を求める．図形的な方法などさまざま考えられるがここではベクトルを用いる．図形的な求め方については，巻末練習問題 A の 7 を参照.

直線 l を $y = x\tan\theta$ とし，$\boldsymbol{v}_1$ を l の方向ベクトル，$\boldsymbol{v}_2$ をこれと直行する法線ベクトルとしよう（図 5.3 の上図）．l についての折り返しとは

$$\boldsymbol{v}_1 \text{をそのまま（1 倍）に}, \boldsymbol{v}_2 \text{を} -1 \text{倍にする} \tag{5.5}$$

という変換 f である．この変換 f は，平行四辺形を平行四辺形にうつすから線形変換で，これを $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ と表わす A を求める．

方向ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，法線ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}_1^{\theta}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}_2^{\theta}$$

にとれて，これらは基底をなす.（5.5）を式でかけば

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = -\boldsymbol{v}_2 \tag{5.6}$$

である．一般のベクトルの像はこれらの基底を用いて

$$f(s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2) = sf(\boldsymbol{v}_1) + tf(\boldsymbol{v}_2) = s\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2$$

となる．つまり f は（5.6）で完全にきまっている．$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ とすれば，（5.6）は

$$A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_2$$

となる．まとめてかくと，

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで注意してほしいことは，A をかけても $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は（符号は別として）向きをかえないことである．例 1 でみたように，行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ は，図 5.3 上図からわかるように，θ だけの回転行列 $R(\theta)$ である．そこで $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} = R(-\theta)$ を両辺の右からかければ A が得られる．

折り返しは向きをかえる（平面を裏返す）．この行列 A の行列式は $|A| = -\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = -1$ でたしかに負で A が平面を裏返すことを示している．

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (5.7) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

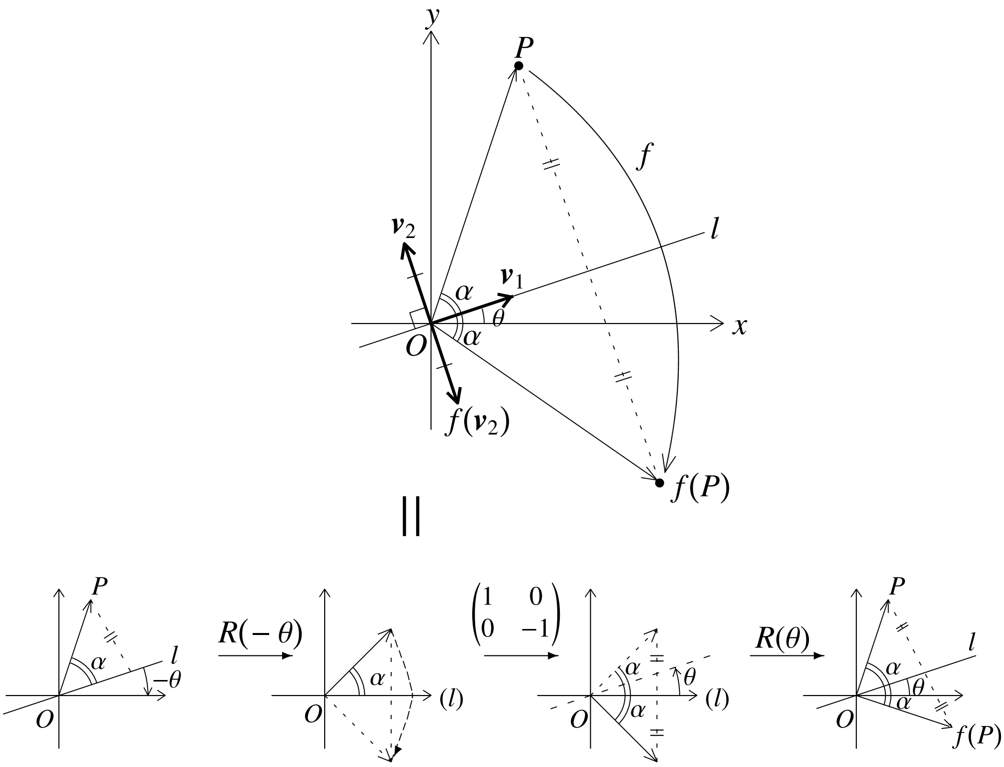


図 5.3.　　直線 $l: y = x\tan\theta$ に関する折り返しとその分解.

ここで $\theta = 0$ とすると $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ となり，これはたしかに $x \mapsto x$, $y \mapsto -y$ という x 軸 $l: y = 0$ についての折り返しを表わしている.

これで，原点をとおり x 軸と θ の角をなす直線 l に関して折り返す線形変換の行列は $A = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}$ であることがわかった．重要なことは，先にも述べたように，直線 l の方向ベクトルである $\boldsymbol{v}_1$ と，それに直交する $\boldsymbol{v}_2$ は，それらに A をかけてもやはりおなじ向きをもつベクトルになることである．この $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ 以外の方向をもつベクトル $\boldsymbol{v}$ は，A をかけると $\boldsymbol{v}$ とはことなる方向をもつベクトルになる．つまり，$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$, $s \neq 0$, $t \neq 0$, とすると $A\boldsymbol{v} = sA\boldsymbol{v}_1 + tA\boldsymbol{v}_2 = s\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2$ となり，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ はことなる方向をもつ．これらの事実は，ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は，行列 A にとって「A に固有の」特別なベクトルであることを意味する.

また,（5.7）をみてみると，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ は回転行列 $R(\theta)$ であり，A は

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} = R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(-\theta)$$

と，「回す・折り返す・回す」に分解できる（図 5.3 下図）．つまりまず $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} = R(-\theta)$ をかけて x，y 座標から x_θ，y_θ 座標へうつり，新しい座標で第 2 成分 y_θ を -1 倍して「折り返し」，またもとの座標に $R(\theta)$ 倍でうつると A が得られる．これらの合成が l についての折り返しである．直線に関しての折り返しを表わす行列 A が，2 つの回転ではさまれた対角行列に分解されることに注意してほしい．

問 1. A を直線 $y = x\tan\theta$ に関する折り返し，B を x 軸に関する折り返しを表わす行列とする．AB と BA はそれぞれどんな変換を表わすか．

5.3 2 次曲線

x と y の 2 次式

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1 \tag{5.8}$$

が定める xy 平面の 2 次曲線 C を考えよう．これは

$$(x+y)^2 + 2(x-y)^2 = 1 \tag{5.9}$$

とかけ，さらに $X = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$，$Y = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$ とすれば

$$2X^2 + 4Y^2 = 1 \tag{5.10}$$

となる．つまり新しい XY 座標でみることで，曲線 C が楕円であるとわかる．X 軸，Y 軸はたがいに直交し，また X，Y を定めるのに $\sqrt{2}$ でわったので，$(X, Y) = (1, 0), (0, 1)$ が表わす 2 点の原点からの距離は 1 となり，縮尺も xy 座標とおなじである．

この座標変換を行列でかけば

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

である．すなわち，(5.3) あるいは (5.4) とくらべると，X と Y は

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_2 \tag{5.12}$$

を基底とする座標で，この座標系は $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を基底とする xy 座標を $\frac{\pi}{4}$ 回転したものである（図 5.4）．

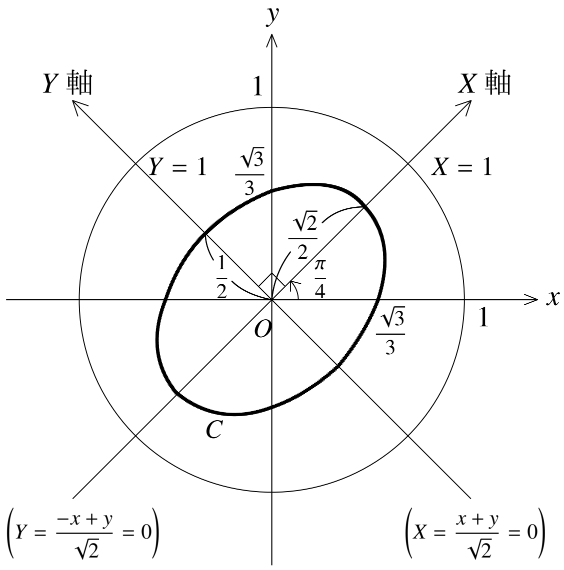


図 5.4.　　2 次曲線 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$.

さらに (5.8) も

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1 \tag{5.13}$$

とかけ，これが 2 次曲線と行列を結ぶポイントである．C の XY 座標での表示を得るには，これに (5.11) を代入すればよい．横ベクトル $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}$ を用いて表わすと（下の注参照）

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{5.11'}$$

であるから，（5.8）から（5.10）への変形を行列で行なうと

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad (5.14) \\
&\qquad = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2X^2 + 4Y^2
\end{aligned}$$

となる．このように（5.13）の行列を対角行列に変形することが，2 次曲線（5.8）の表示を標準形（5.10）にすることといえる．

（5.12）で表わされるベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に，（5.13）中の行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ をかけても，やはりそれらとおなじ向きをもつベクトルになる．それら以外のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に A をかけた $A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ とことなる向きをもつ．その意味で，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は，行列 A にとって「A に固有の」特別なベクトルである．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は，（5.13）で表わされる楕円の主軸を向くベクトルであることに注意してほしい．

注．　一般に $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(X = ax + by,\ Y = cx + dy)$ を横ベクトルで表わすと，$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$（$b$ と c がいれかわる）．これが関係式のかきかえ（5.11）↔（5.11'）をあたえる．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$A^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とかき，A の**転置行列**という．ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対しても $\boldsymbol{v}^\top = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ とかくと，上の事実は $(A\boldsymbol{v})^\top = \boldsymbol{v}^\top A^\top$ と表わせる．

$A = A^\top$ である行列を**対称行列**という．（5.8）を（5.13）のようにかくとき，$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ などでなく対称な $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に選ぶと，変数変換しても対称なままであるなど都合がよい．$\boldsymbol{v}$ をベクトル，A を対称行列としたとき（5.13）の左辺のような

$$\boldsymbol{v}^\top A \boldsymbol{v}$$

を **2** 次形式という．

問 1.　A，B を 2 次行列とする．$(AB)^\top = B^\top A^\top$ を示せ．

5.4　固有ベクトルと対角化

第 5.2 節で述べた直線に関する折り返しや，第 5.3 節で述べた 2 次曲線の例で示したように，それぞれの行列にはそれぞれ特別な方向，すなわち「固有の方向」があると考えてその方向を座標系に使うことで，問題がわかりやすくなることが多い．直線に関する折り返しのときの折り返しの軸 l の方向ベクトルや法線ベクトルのように，行列 A をかけても，方向がかわらないベクトルが行列 A の「固有の方向」である．以上の洞察をもとに，行列の固有値と固有ベクトルを導入しよう．

定義.　A を正方行列とする．ある数 λ に対して

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ があるとき，λ を A の**固有値**という．また $\boldsymbol{v}$ を A の**固有値 λ の固有ベクトル**とよぶ．

直線に関する折り返しのように，あらかじめ行列であたえられていない線形変換 f についても，$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ が $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たせば，λ を f の固有値，$\boldsymbol{v}$ を f の固有ベクトルとよぶ．

ここで注意してほしいことは，行列にせよ線形変換にせよ，固有ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ に対する変換後のベクトル $\boldsymbol{u}'$ は $\boldsymbol{u}$ とことなる方向をもつことである．

注.　行列 A の要素がすべて実数であっても固有値や固有ベクトルの成分は複素数になりうる．また，定義により，固有ベクトルは零ベクトルであってはならないが，固有値は 0 もとりうる．

例 2.　原点をとおる直線 l に関する平面の折り返し写像 f を表わす行列 A について，l の方向ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ は A の固有値 1 の固有ベク

トルであり，法線ベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである（（5.6）式参照）．このように固有ベクトルは方向が重要で，長さは 0 でなければよい．

例 3.　曲線 $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ を調べるのに用いた

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について

$$B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1, \quad B\boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{v}_2$$

であり，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ は B の固有ベクトルである．それに対し，B の固有ベクトルではないベクトル，たとえば基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ や $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ については，$B\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，$B\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_1$ と $B\boldsymbol{e}_1$ はことなる向きで，$\boldsymbol{e}_2$ と $B\boldsymbol{e}_2$ もことなる向きである．

例 4.　単位行列については，$\boldsymbol{0}$ でないベクトルはすべて固有値 1 の固有ベクトルである．

一般の 2 次行列 A でこのような固有ベクトルが 2 方向あったとして，それらを $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ とする．それぞれの固有値を λ，μ とすれば

$$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = \mu\boldsymbol{v}_2 \tag{5.15}$$

である．2 方向とは基底になるという意味で，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の間には $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ が成り立つ．

（5.15）をならべて

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & A\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{v}_1 & \mu\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

とかき，これから

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{v}_1 & \mu\boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

となる．この両辺に左から $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけて対角行列（5.18）を得る．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

（5.18）の右辺は（したがって左辺も），xy 座標で A 倍だった線形変換を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を基底とする st 座標で表わす行列である $\big((s,\ t) \mapsto (\lambda s,\ \mu t)\big)$.

一般にも，A が表わす線形変換を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を基底とする座標でみると，A が $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ に変換される．A を可逆行列 P で「はさんで」$P^{-1}AP$ を対角行列にすることを A の**対角化**という．固有ベクトルをならべた $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ を**とれば** A は自然に対角化される（(5.17)，(5.18)）．

問 1.　例 2 の A を $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ を用いて対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となることをたしかめよ．

問 2.　例 3 の B を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ を用いて対角化せよ．すなわち，$P^{-1}BP$ が対角行列となることをたしかめよ．

5.5　固有方程式と固有ベクトル

固有ベクトルを求める方法を考えよう．$\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルであるという式 $A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\boldsymbol{v} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{5.19}$$

である．固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は（方向を表わすために）$\boldsymbol{0}$ であってはならないが，

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

が逆行列をもてば，(5.19）に左からかけると $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. よって固有値 λ の固有ベクトルがあるためには，(5.20）の行列式は 0 でなくてはならない．す

なわち，

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0. \tag{5.21}$$

これが固有値 λ が満たすべき方程式で，A の**固有方程式**とよぶ．なお，（5.21）における $-\lambda$ の係数 $a+d$ を A の**トレース**とよび，$\mathrm{tr}A$ とかく．

複素数の範囲で考えれば，方程式（5.21）はかならず解 λ をもつ．これが固有値の候補だが，行列式 0 の行列はかならずある方向 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を「消し」

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となる（第 4.3 節定理 4.3 参照）．これは $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ にほかならない．つまり固有方程式の 1 つの解から，固有値と固有ベクトルが 1 つ（1 方向）得られる．

2 次方程式（5.21）の 2 解を λ，μ とし，$\lambda \neq \mu$ とすれば，それぞれから固有ベクトル $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ ができる.（5.18）の要領で A を対角化するには $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix} \neq 0$ かどうかが問題だが，$\lambda \neq \mu$ ならば自動的に正しい．すなわち，

定理 5.2.　2 次行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}\,(\neq \boldsymbol{0})$ について，これらの固有値 λ，μ がことなれば $\begin{vmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{vmatrix} \neq 0$ である．

証明.　問題の行列式が 0 とする．すると $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ は平行で（第 4.3 節定理 4.3），ある数 a があって $a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$．この式に A をかけると $\lambda a\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{w}$ となる．$a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \neq 0$ なので $\lambda = \mu$ となり，仮定に反する．
証明終わり．

したがってつぎの定理を得る．

定理 5.3.　2 次正方行列は，固有方程式が重根をもたないかぎりかならず対角化できる．

固有方程式の解が実数かどうかも問題によっては重要で，一般には固有ベクトルも複素ベクトルになりうる．しかし平面に結果を図示できないだけで計算はおなじである．

問 1.　$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，B を対角化せよ．

例 5.　実対称行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R})$ はかならずある回転行列 $R(\theta)$ で対角化でき，固有値は実数である．したがって，$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$ の例と同様に，2 次曲線 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$ は回転によりかならず標準形 $\lambda X^2 + \mu Y^2 = k$ に変換される．

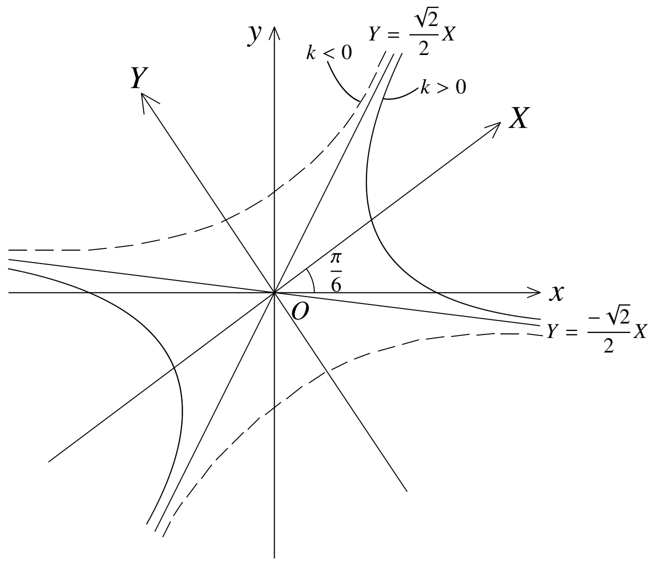


図 5.5.　$x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = k$.

例 6.　2 次曲線 $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 = k$ を調べる（図 5.5）.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \quad \left(B = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix} \text{とおく} \right)$$

とかける．$|B - \lambda| = \lambda^2 + 4\lambda - 32 = (\lambda - 4)(\lambda + 8)$ より固有値は $4,\ -8$.

$\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ がそれぞれ固有値 4, − 8 の固有ベクトルである．これらを長さ 1 にとったおかげで

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

であり

$$\begin{pmatrix}1 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -5\end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}R\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

となる．よって $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = R\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ により，

$$k = \begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = 4X^2 - 8Y^2.$$

よってこの 2 次曲線は，xy 座標を $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した XY 座標でみれば，$k = 0$ なら交わる 2 直線 $Y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}X$，$k \neq 0$ ならこれらを漸近線とする双曲線である．

注．　上で $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ のかわりに $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_2 & -\boldsymbol{v}_1\end{pmatrix} = R\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ をとっても B は対角化される．これは X 方向と $-Y$ 方向をいれかえることになるが，軸のよび名がかわるだけでおなじ概形が結論されるのはいうまでもない．$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$ をとった場合も Y 軸の正負の向きがいれかわるだけで同様である．

問 2.　2 次曲線 $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4$ の概形を調べよ．

本章の最後として，これまでの結果と固有値が重根になるときとをあわせてまとめよう．

まず，λ を任意の数としたとき，$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ なる行列を**ジョルダン標準形**という．重根の場合の主張の正当性は付録 C で述べるが，以下の定理が成り立つ．

定理 5.4. 　2 次正方行列 A は，

1. 固有方程式が重根をもたなければかならず対角化できる．
2. 固有値 λ が重根で，λ に方向のことなる 2 つの固有ベクトルがあれば A はそもそも対角行列である．
3. 固有値 λ が重根で，方向がことなる 2 つの固有ベクトルが存在しなければ，A は対角化できないが，ジョルダン標準形に変換することができる．

問題

1. 　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．また A^n を求めよ．

2. 　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のトレースを $\mathrm{tr}A = a + d$ で定めた．$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$，$\mathrm{tr}BAB^{-1} = \mathrm{tr}A$（$|B| \neq 0$ のとき）を示せ．

3. 　対称行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$（$a$，$b$，$c$ は実数）と回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，θ を適当にとれば $R(-\theta)BR(\theta)$ がかならず対角行列になることを示せ．

4. 　$T^{\mathrm{T}}T = I$ を満たす（実）正方行列を直交行列という．T は 2 次行列としよう．

（1）　$T = (\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2)$ とかけば，この条件は $\left|\boldsymbol{u}_j\right| = 1$ かつ $\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{u}_2$ と（$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が直交する）同値であることをたしかめよ．また $\left|T\right| = \pm 1$ であることを示せ．

（2）　$A = \begin{pmatrix} -1/6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列 T を（あれば）すべて求めよ．

5.　楕円 $3x^2 + y^2 = 1$ を正の向きに $\pi/6$ ラジアン回転して得られる楕円の方程式を $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ と表わすとき，a，b，c を求めよ．

6.　つぎの 2 次曲線の概形をかけ．[ヒント：(2) では平行移動も考える]

(1)　$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = 8.$

(2)　$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8\sqrt{5}(x - y) + 16 = 0.$

練習問題

練習問題 A

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ を計算することによって，A が行列のとき，命題“$A^2 = O$ ならば $A = O$”は誤りであることを示せ．またこの命題を成り立たせない行列 A の例をもう 1 つみいだせ．

2. $AB = I$ ならば $A^2B^2 = I$ であることを証明せよ．

3. 点 $(0,\ 1)$ を点 $(-1,\ 3)$ へ，点 $(1,\ -1)$ を点 $(3,\ -4)$ へうつすような線形変換の行列を求めよ．

4. 点 $(3,\ 2)$ を原点のまわりにつぎの角だけ回転した点の座標を求めよ．

（1）$30°$．　（2）$-45°$．　（3）$150°$．

5. つぎの関係式（1）を満たす数 x，y，u，v はかならず関係式（2）を満たし，また逆に,（2）を満たす数 x，y，u，v はかならず（1）を満たすとき，数 a，b，c，d を求めよ．

（1）$\begin{cases} x = au + 5v, \\ y = 4u + bv. \end{cases}$　（2）$\begin{cases} u = cx - 5y, \\ v = dx + 3y. \end{cases}$

6. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で表わされる線形変換について，つぎの問に答えよ．

（1）y 軸上の点は，どのような図形にうつされるか．

（2）この線形変換で，直線 $y = kx$ 上の点がつねに直線 $y = kx$

上にうつされるとき，k の値を求めよ．

7.　（1）平面上で，点 P を x 軸に関して対称に移動し，さらに原点のまわりに角 2θ だけ回転した点を P' とすれば，P' は x 軸を角 θ だけ回転して得られる直線に関して，P と対称な位置にあることを示せ．

（2）　平面上で，原点のまわりに x 軸を角 θ だけ回転して得られる直線に関する対称移動を表わす線形変換の行列を求めよ．

練習問題 B

1.　2×2 型の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$s = a + d$，$t = ad - bc$ とおけば，I を 2 次の単位行列として，つぎの等式が成り立つことを証明せよ．

$$A^2 - sA + tI = O.$$

2.　（1）任意の 2 次元の列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，つねに $X\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ となる行列 X を求めよ．

（2）任意の 2 次の正方行列 A に対して，つねに $XA = AX$ となる行列 X は，k を任意の数，I を 2 次の単位行列として，$X = kI$ という形をもつことを証明せよ．

3.　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に，それぞれどのような行列を左からかければ，つぎの行列が得られるか．

（1）$\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$.　　（2）$\begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$.　　（3）$\begin{pmatrix} a & b \\ a + c & b + d \end{pmatrix}$.

（4）$\begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{pmatrix}$.　　（5）$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

4.　t を媒介変数とする直線 l の方程式が $\begin{cases} x = 4 + 2t, \\ y = 3 + t \end{cases}$ であるとき，行列 $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の表わす線形変換によって，l はどのような図形にうつされるか.

付録A　三角関数の加法定理・2倍角の公式・半角の公式

例.　原点のまわりの角 α の回転を表わす線形変換に，原点のまわりの角 β の回転を表わす線形変換を合成すると，回転の意味から，これは，原点のまわりの角 $(\alpha+\beta)$ の回転を表わす線形変換になる（図 A.1）．

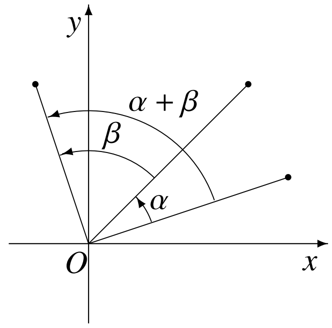


図 A.1.　直積した原点まわりの回転.

したがって，つぎの行列の関係が恒等的に成り立つ．

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

左辺の積を計算し，両辺の第 1 列を比較することによってつぎの公式が得られる．

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

上の式で，β のかわりに $-\beta$ とおくことにより，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の公式が得られる．すなわち

$$\boldsymbol{\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,}\qquad\text{（復号同順）}$$
$$\boldsymbol{\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.}$$

上の式が成り立つことを，それぞれ**正弦の加法定理**，**余弦の加法定理**という.

問 1.　加法定理を用いて，$\sin(45° + 30°)$，$\cos(60° + 45°)$ の値を計算せよ.

問 2.　原点を中心とする相似比 k の相似変換を f，原点のまわりの角 θ の回転を g とする．合成変換 $f \circ g$ の行列を求めよ.

正弦，余弦の加法定理の式を辺々わり算して，つぎの**正接の加法定理**が得られる.

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.\quad \text{（復号同順）}$$

問 3.　正接の加法定理を証明せよ.

正弦，余弦，正接の加法定理で，$\beta = \alpha$ とおけば，つぎの **2 倍角の公式**が得られる.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ から

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

したがって

$$\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

これらを**半角の公式**という.

問 4.　$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて，$\sin 15°$，$\cos 15°$，$\tan 15°$ を求めよ.

付録B　行列の演算と群

例 1.　a を任意の定数とし，$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という形の行列全体の集合を S とするとつぎのことがわかる．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ であるから，行列の乗法について S は閉じている．

（2）S の要素は 2 次の正方行列であるから，乗法の結合法則が成り立つ．

（3）単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は S の要素である．

（4）S の要素 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は S の要素である．

例 2.　原点のまわりの角 θ だけの回転を R_θ と表わし，任意の角 θ に対する回転 R_θ 全体の集合を $\boldsymbol{R}$ とする．

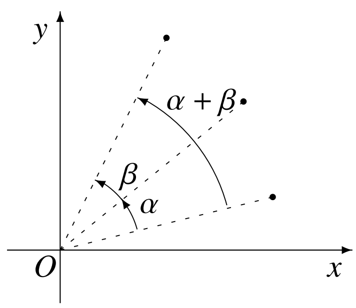


図 B.1.　合成変換.

（1）$R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$（図 B.1）であるから，$\boldsymbol{R}$ の任意の要素 R_α と R_β に合成変換 $R_\beta \circ R_\alpha$ を対応させる演算 $\circ$ について $\boldsymbol{R}$ は閉じている．

（2）演算 $\circ$ について，結合法則 $R_\gamma \circ (R_\beta \circ R_\alpha) = (R_\gamma \circ R_\beta) \circ R_\alpha$ が成り立つ．

（3）平面上の各点を，その点自身に対応させる写像 I（このような写像を恒等写像という．）は，R_0 と表わされるから，I は $\boldsymbol{R}$ の要素である．

（4）$\boldsymbol{R}$ の任意の要素 R_θ の逆変換 $R_{-\theta}$ も $\boldsymbol{R}$ の要素である．

一般に，ある集合 G の任意の 2 つの要素 a，b に対して定義された演算 $a * b$ がつぎの性質をもつとき，G は演算 $*$ について**群**をなすという．

（1）$a \in G$，$b \in G$ ならば $a * b \in G$．すなわち，G は演算 $*$ について閉じている．

（2）G の任意の要素 a，b，c に対して

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

すなわち，演算 $*$ について結合法則が成り立つ．

（3）G のなかに特定の要素 e が存在し，G の任意の要素 a に対して，つねに

$$e * a = a * e = a$$

となる．

（4）G の任意の要素 a に対して，

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

となるような G の要素 a^{-1} が存在する．

上の（3）における要素 e を G の**単位元**といい，（4）における要素 a^{-1} を a の**逆元**という．

例 3.　2×2 型の行列のうち，逆行列をもつもの全体からなる集合を G とすると，この G は行列の乗法について群をなす.

なんとなれば，

（1）$A \in G$，$B \in G$ ならば A^{-1}，B^{-1} が存在し，第 2 章問題 5 により $B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列となるから，$AB \in G$ である.

（2）行列の乗法では，一般に，結合法則が成り立つ.

（3）2×2 型の単位行列 I の逆行列は I 自身であるから，$I \in G$ であり，任意の G の要素 A に対して

$$IA = AI = A.$$

（4）$A \in G$ ならば A^{-1} は 2×2 型の行列であって，その逆行列 A をもつから，$A^{-1} \in G$ である.

例 4.　つぎの 4 つの 2×2 型の行列からなる集合

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

が行列の乗法について群をなす.

このことは，この 4 つの行列が左から順に，原点のまわりの

$$0^\circ,\quad 90^\circ,\quad 180^\circ,\quad 270^\circ$$

の回転を表わす線形変換の行列であることを考えれば，例 2 から明らかであろう.

問 1.　例 4 の群の単位元と，4 つの要素それぞれの逆元をいえ.

問 2.　つぎの 2 つの行列の集合が乗法について群をなすことをたしかめよ.

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

問題

1.　つぎの集合は乗法について群をなすことを示せ.

$$\{1,\ -1,\ i,\ -i\}.$$

2.　a，b が実数で，$ab = 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

の型の行列の集合は乗法について群をなすことを示せ.

3.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が行列の乗法について群をなすことを証明せよ.

4.　つぎの集合は,（　）の中の演算について群をなすことを示せ.

（1）正の実数全体.（乗法）

（2）整数全体.（加法）

（3）2×3 型の行列の全体.（加法）

付録C　ジョルダン標準形

C.1　ジョルダンの標準形

第5章でみたように，A の固有方程式 $\left|A - tI\right| = 0$ がことなる根 $t = \lambda$, μ をもてば，それぞれを固有値とする固有ベクトルが存在して基底となり，A は対角化可能である．では，重根 $\lambda = \mu$ のときはどうだろうか．本節では固有値 λ が重根のときを議論する．

まず，固有値 λ の固有ベクトルで方向がことなる $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{v}$ がある場合には，

$$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{v} & \lambda\boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{vmatrix} \neq 0$$

となる．この式の両辺に左から $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}^{-1}$ をかけると $A = \lambda I$ となる．つまり A は**スカラー行列**（単位行列のスカラー λ 倍）で，はじめから対角型である．

つぎに，行列 A の固有値 λ のことなる方向の2つの固有ベクトルはない場合を考察しよう．

行列 $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有方程式の左辺を p_A とかく．

$$p_A(t) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

この t の2次式を2次正方行列 A の**特性多項式**とよぶ．この $p_A(t)$ の t に A を代入すると零（ゼロ）行列になることは直接計算でたしかめることができる．ただし，t に A を代入した場合，p_A の最後の項 $ad - bc$ には単位行列 I がかかっていると考える．すなわち，

定理 C.1.（ケーリーハミルトンの定理）　A を2次正方行列 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする．このとき

$$p_A(A) = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = O. \tag{C.1}$$

以下ではこれをもとに，p_A が重根をもつときを考える．λ，μ を $p_A(t)=0$ の解（p_A の根）とすれば

$$p_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu) \tag{C.2}$$

であり，（C.1）はつぎのようにもかける．

$$(A-\lambda I)(A-\mu I) = O. \tag{C.3}$$

よって重根の場合は

$$(A-\lambda I)^2 = O \tag{C.4}$$

が成り立つ．いま $A-\lambda I = O$ なら A ははじめからスカラー行列（単位行列のスカラー倍）だから，$A-\lambda I \neq O$ としよう．

いま，$A-\lambda I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$ というように $A-\lambda I$ を列ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ とで表現してみると $\boldsymbol{v}_1$ または $\boldsymbol{v}_2$ は A の固有ベクトルになる．なぜならば，(C.4）より，$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = O$ となるからである．ここで $\left|A-\lambda I\right| = 0$ であるから第 4.3 節定理 4.3 より，ある $\boldsymbol{v} \neq 0$ が存在して $\boldsymbol{v}_1 = s\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}_2 = t\boldsymbol{v}$ とかけることがわかり，$A-\lambda I = \begin{pmatrix} s\boldsymbol{v} & t\boldsymbol{v} \end{pmatrix}$ となる．よってどんな $\boldsymbol{w}$ も，$A-\lambda I$ でうつすと $\boldsymbol{v}$ の何倍かとなる．すなわち

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}.$$

実際 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，$(A-\lambda I)\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} s\boldsymbol{v} & t\boldsymbol{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (sx+ty)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}$, $a = sx+ty$, となる．すべての $\boldsymbol{w}$ に対して $a=0$ なら，$A-\lambda I = O$ となるので $a \neq 0$ としてよく，$\boldsymbol{w}$ を a でわったものをあらためて $\boldsymbol{w}$ とすれば

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \tag{C.5}$$

としてよい．このとき $k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ となる数 k，l が存在するなら，この式の両辺を $A-\lambda I$ 倍して

$$l(A-\lambda I)\boldsymbol{w}\,(= l\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}. \qquad ((A-\lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ に注意})$$

よって $l=0$，$k=0$，つまり $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は基底をなし，$\left|\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}\right| \neq 0$ である．

結局，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ $\left(\left|\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}\right| \neq \boldsymbol{0}\right)$ が

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}, \quad (A-\lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

のようにとれて，対角化のときのようにならべてかけば

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}^{-1}(A-\lambda I)\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

左辺を展開し，両辺に λI をくわえれば

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \tag{C.6}$$

となる．この右辺を**ジョルダン標準形**という．以上を定理という形でまとめよう．

定理 C.2.

1. 行列 A の固有値 λ が重根で，λ に方向がことなる 2 つの固有ベクトルがあれば行列 A は対角行列である．
2. 行列 A の固有値 λ が重根で，方向がことなる λ の 2 つの固有ベクトルが存在しなければ，A はジョルダンの標準形に変換することができる．

問 1.　2 次行列に対するケーリーハミルトンの定理をたしかめよ．

問 2.　行列 $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ が対角化できないことを示し，行列 P を適当にとり $P^{-1}AP$ がジョルダンの標準形となるようにせよ．

C.2　ケーリーハミルトンの定理について

前節では，ケーリーハミルトンの定理をジョルダン標準形の導出のために使った．この定理は「やってみるとそうなっている」不思議な式だという印象があるかもしれない．ケーリーハミルトンの定理は，p_A を因

数分解した（C.2）の形でとらえると納得しやすい．以下ではこれを説明しよう．

まず $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$（対角行列）のときを考える．$P_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu)$ であり

$$p_A(A) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \lambda I\right)\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \mu I\right)$$

であるが，この積が O になるのは明らかである．すなわち，

$$p_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O. \tag{C.7}$$

A が対角行列でないときも

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

と対角化できれば，やはり同様である．実際

$$I = PIP^{-1}, \qquad A = P\Lambda P^{-1}, \qquad A^2 = P\Lambda^2 P^{-1}$$

を使えば

$$p_A(A) = p_A(P\Lambda P^{-1}) = P p_A(\Lambda) P^{-1}. \tag{C.8}$$

そして下の補題で示すように $p_A(t) = p_\Lambda(t)$ なので，対角行列のときの $p_\Lambda(\Lambda) = O$ より，この場合にも $p_A(A) = O$ となる．座標をとりかえ対角化すれば「当たり前」の（C.7）を，対角化する前の行列でかいたのが（C.1）である．

補題．　$A = P\Lambda P^{-1}$ ならば $p_A = p_\Lambda$. つまり固有方程式は座標系によらない．

証明．　$A = P\Lambda P^{-1}$ より

$$A - tI = P\Lambda P^{-1} - tI = P(\Lambda - tI)P^{-1}$$

とかきなおせるので，行列式の乗法性を用いれば

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \left|A - tI\right| = \left|P(\Lambda - tI)P^{-1}\right| \\ &= \left|P\right| \cdot \left|\Lambda - tI\right| \cdot \left|P^{-1}\right| = \left|\Lambda - tI\right| = p_\Lambda(t). \end{aligned}$$

A が対角化できず，ジョルダン標準形 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ をもつ場合も同様である．実際（C.7）に対応して $\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \lambda I\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$．よってふたたび（C.8）より $p_A(A) = (A - \lambda I)^2 = O$ となる．
証明終わり．

索 引